

А. Ахиезер и И. Писмеранчук

НЕКОТОРЫЕ
ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ЯДРА

А. АХИЕЗЕР и И. ПОМЕРАНЧУК

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЯДРА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

10.04.51
13-5-4
И. Кадж

АННОТАЦИЯ

Обзорная монография, посвящённая ряду вопросов ядерной физики, для решения которых несущественна точная теория ядерных сил. Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по физике атомного ядра.

Редактор В. А. Лешковцев. Техн. редактор Р. А. Негримова.

Подписано к печати 24/IX 1948 г. 20 печ. л. 16,87 уч.-изд. л. 33730 тип. зн. в печ. л. А-07546. Тираж 7000 экз. Цена книги 10 руб. Переплёт 2 руб. Заказ № 383.

16-я типогр. треста «Полиграфгиз» ОГИЗ при Совете Министров СССР, Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Взаимодействие нейтронов с протонами	7
§ 1. Рассеяние медленных нейтронов протонами	7
§ 2. Классификация состояний системы нейтрон—протон и основное состояние дейтрона	17
§ 3. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде	33
§ 4. Рассеяние нейтронов связанными протонами	48
§ 5. Замечания о рассеянии быстрых нейтронов протонами	54
§ 6. Рассеяние протонов протонами	57
§ 7. Захват нейтронов протонами	65
§ 8. Фоторассечение дейтрона	81
Глава II. Статистические свойства тяжёлых ядер	91
§ 9. Составное ядро	91
§ 10. Статистические свойства тяжёлых ядер	97
§ 11. Связь между шириной уровня и сечением образования составного ядра	106
§ 12. Эффективные сечения для упругих и неупругих столкновений	111
§ 13. Вероятность прилипания	125
§ 14. Распределение частиц, вылетающих при распаде составного ядра, по энергиям	133
§ 15. Радиационные свойства ядра	135
Глава III. Резонансные явления	141
§ 16. Дисперсионная формула	141
§ 17. Теория резонансного рассеяния	149
§ 18. Захват медленных нейтронов свободными ядрами	162
§ 19. Усреднённые эффективные сечения	176
§ 20. Замечания о ядерных реакциях, происходящих с участием заряженных частиц	183
Глава IV. Деление тяжёлых ядер	191
§ 21. Механизм деления	191
§ 22. Вероятность деления	202

§ 23. Цепная реакция	209
§ 24. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах	225
Глава V. Взаимодействие медленных нейтронов с веществом	236
§ 25. Захват медленных нейтронов в кристаллах	236
§ 26. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах	250
§ 27. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах	270
§ 28. Переход к рассеянию свободными ядрами	283
§ 29. Функция распределения нейтронов в кристаллах	288
§ 30. Рефракция нейтронов	296
Дополнение. Расщепление быстрых дейтронов	303
Литература	315
Предметный указатель	319

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическое изучение свойств атомных ядер находится в настоящее время в самой начальной стадии, ввиду отсутствия точной теории ядерных сил.

Имеются, однако, такие ядерные процессы, многие свойства которых не зависят от детальной картины взаимодействия между ядерными частицами. Рассмотрению таких процессов посвящена настоящая книга. При этом главное внимание уделено процессам, в которых участвуют нейтроны.

Первые четыре главы представляют собой изложение ряда работ, опубликованных в различных журналах. Последняя (пятая) глава основана на уже опубликованных ранее работах авторов.

Авторы, не претендуя ни на полноту, ни на оригинальность изложения, тем не менее решились на издание этой книги ввиду отсутствия монографии, содержащей сколько-нибудь полное и современное изложение рассматриваемых ниже вопросов.

Мы хотели бы здесь поблагодарить Л. Д. Ландау, И. Е. Тамма и Я. А. Смородинского за их ценные критические замечания.

А. Ахиезер, И. Померанчук

ГЛАВА I

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ С ПРОТОНАМИ

§ 1. Рассеяние медленных нейтронов протонами. Действующие между нейтроном и протоном ядерные силы обуславливают рассеяние нейтронов протонами, а также приводят к образованию связанного состояния — дейтрона.

Систематическое изучение различных процессов, связанных с существованием взаимодействия между нейтроном и протоном, требует детальной теории ядерных сил, о природе которых мы знаем, к сожалению, очень мало. Поэтому такое систематическое изучение в настоящее время не может быть проведено.

Однако, как показали Бете и Пайерлс ^[1] в области малых энергий, когда длина волны, отвечающая относительному движению нейтрона и протона, велика по сравнению с радиусом действия ядерных сил, для описания различных процессов, происходящих в системе нейтрон—протон, не требуется детальной теории ядерных сил.

Вероятность этих процессов, а также энергия связи и другие величины, характеризующие дейтрон, выражаются через небольшое число параметров совершенно независимо от природы ядерных сил. Существенным здесь является лишь то, что ядерные силы характеризуются очень малым радиусом действия.

В этой главе мы будем, главным образом, рассматривать именно этот случай малых относительных энергий нейтрона и протона.

Мы будем сначала предполагать, что силы, действующие между нейтроном и протоном, центральны, но могут,

однако, зависеть от взаимной ориентации спинов обеих частиц. Иными словами, мы предполагаем, что эти силы зависят от расстояния между частицами и от взаимной ориентации их спинов.

Из этого предположения следует, что рассеяние медленных нейтронов протонами, когда длина волны, отвечающая относительному движению частиц, значительно превосходит радиус действия сил, должно быть сферически симметричным (в системе отсчёта, где покоится центр инерции частиц).

Если ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона, то сечение рассеяния будет различным для обеих ориентаций спинов. Далее мы покажем, что при заданной ориентации спинов сечение рассеяния медленных нейтронов протонами в предположении бесконечно малого радиуса действия ядерных сил определяется только одним параметром; этим параметром является значение логарифмической производной от радиальной волновой функции системы нейтрон—протон по расстоянию между частицами, когда это расстояние по порядку величины равно радиусу действия ядерных сил. (В первом приближении можно считать, что частицы просто совпадают.)

Сечение рассеяния неполяризованных нейтронов и протонов определяется, следовательно, двумя параметрами, если только силы взаимодействия зависят от взаимной ориентации спинов частиц. Опыты по рассеянию медленных нейтронов протонами показывают, что ядерные силы, действующие между нейтроном и протоном, зависят от взаимной ориентации спинов частиц.

Чрезвычайно существенным является то обстоятельство, что только отрицательным значениям введённого выше параметра может отвечать связанное состояние системы нейтрон—протон. Поэтому весьма важно выяснить, какой знак имеет этот параметр при параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и протона. Теоретически на этот вопрос при современном состоянии теории ядерных сил ответить нельзя.

Опыты по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами также не дают возможности ответить на инте-

ресующий нас вопрос, так как в формулу для сечения рассеяния медленных нейтронов протонами входит квадрат этого параметра. Ниже мы увидим, что, изучая рассеяние медленных нейтронов в молекулярном пара- и ортоводороде, можно путём сравнения теоретических выводов с экспериментальными результатами показать, что связанное состояние системы нейтрон—протон возможно только при параллельной ориентации спинов. Иными словами, в дейтроне спины частиц имеют одинаковую ориентацию.

Оказывается, что дейтрон не может находиться в возбуждённых состояниях и что энергия его единственного уровня, т. е. энергия связи дейтрона, очень просто выражается через значение указанного выше параметра, относящегося к случаю параллельной ориентации спинов частиц. Таким образом рассеяние медленных нейтронов протонами с одинаковой ориентацией спинов определяется в конечном счёте энергией связи дейтрона.

Мы видим, что задача о рассеянии нейтронов протонами тесно связана с задачей об основном состоянии дейтрона. Волновая функция последнего должна быть сферически симметричной, если предположить центральный характер сил. Иначе говоря, основное состояние дейтрона должно быть S -состоянием (пользуясь оптической терминологией, можно сказать, что это будет 3S_1 -состояние).

Опыты показывают, что дейтрон обладает квадрупольным электрическим моментом. Это обстоятельство противоречит, однако, сделанному выше выводу о том, что основным состоянием дейтрона является S -состояние, так как в последнем распределение зарядов обладает сферической симметрией, и поэтому в S -состоянии квадрупольный момент должен равняться нулю. Для того чтобы объяснить существование квадрупольного момента дейтрона, необходимо предположить, что основное состояние дейтрона не описывается чистой S -волной, а является суперпозицией S -волны и одной или нескольких волн, отвечающих значениям углового момента, отличным от нуля. Ниже мы увидим, что основным состоянием дейтрона следует считать суперпозицию S - и D -волн. Для того чтобы получить необходимую величину квадруполь-

ного момента, необходимо предположить, что «примесь» D -волны к S -волне составляет всего лишь несколько процентов.

Наличие D -волны в основном состоянии дейтрона показывает, что предположение о центральном характере сил является неверным. В действительности силы, действующие между нейтроном и протоном, не являются строго центральными. Это значит, что они, помимо расстояния между частицами, зависят ещё от ориентации общего спина по отношению к радиусу-вектору, соединяющему обе частицы. Отклонением от центрального характера сил и объясняется существование квадрупольного момента дейтрона.

Однако это отклонение в области малых энергий, которые мы будем главным образом изучать, в общем несущественно (если не считать квадрупольного момента дейтрона); и поэтому при рассмотрении целого ряда вопросов вполне законно пользоваться предположением о центральном характере сил и считать основным состоянием дейтрона S -состояние.

Приступая сейчас к подробному рассмотрению различных процессов, связанных с существованием взаимодействия между нейтроном и протоном, мы будем вначале исходить из предположения о центральном характере сил, действующих между нейтроном и протоном.

Начнём с рассмотрения рассеяния медленных нейтронов протонами.

Напомним сначала, как решается общая задача о рассеянии частиц некоторым силовым центром.

Предположим, что на частицу действуют центральные силы. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния определяется следующей формулой [2]:

$$d\sigma = \frac{\pi}{2k^2} \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\delta_l} - 1) \right|^2 \sin \theta d\theta, \quad (1.1)$$

где k — волновой вектор частицы, θ — угол рассеяния, $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра l -го порядка, а δ_l — так называемые фазы на бесконечности, определяющие асимптотическое поведение волновой функции вдали от силового центра.

Волновая функция частицы может быть представлена в виде

$$\psi = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta),$$

где u_l удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + (E - V) u_l = 0 \quad (1.2)$$

(E — энергия частицы, V — её потенциальная энергия и M — масса частицы).

Вдали от силового центра, при больших r , функция $u_l(r)$ определяется следующей асимптотической формулой:

$$u_l(r) = \text{const} \cdot \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (1.2')$$

(в аргумент $\sin$ входит $-\frac{l\pi}{2}$, благодаря чему фаза δ_l обращается в нуль для свободного движения).

Приведённые выше формулы могут быть использованы при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами.

Дифференциальное сечение рассеяния нейтронов протонами в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся частиц, определяется общей формулой (1.1). Волновой вектор k равен при этом

$$k = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} ME_0}}{\hbar},$$

где E — энергия относительного движения нейтрона и протона в системе центра инерции, E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, и M — масса нейтрона.

Мы рассмотрим тот случай, когда длина волны нейтрона λ (в системе центра инерции) значительно больше радиуса действия ядерных сил ($\sim 10^{-13}$ см). Этому условию удовлетворяют нейтроны с энергией, не превосходящей 10–15 MeV.

Так как прицельный параметр сталкивающихся частиц с моментом относительного движения $\hbar k$ равен по

порядку величины $l\lambda$, то при выполнении условия

$$\lambda \gg r_0,$$

где r_0 по порядку величины определяет радиус действия ядерных сил, можно считать, что все δ_l , за исключением δ_0 , практически равны нулю.

Дифференциальное сечение рассеяния приобретает при этом вид

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \sin \theta d\theta. \quad (1.1')$$

Как видно из этой формулы, при выполнении условия $\lambda \gg r_0$ в системе центра инерции рассеяние является сферически симметричным.

Итак, задача определения сечения рассеяния медленных нейтронов протонами сводится к нахождению одной величины — фазы δ_0 *).

Для определения фазы δ_0 заметим, что в области $r < r_0$ потенциальная энергия достигает очень больших значений, значительно превышающих энергию нейтрона E (для связанного состояния нейтрона и протона, т. е. в дейтроне эффективная величина потенциальной энергии составляет несколько десятков MeV [3]), а вне этой области V становится очень малым, так как ядерные силы чрезвычайно быстро спадают с расстоянием. Мы можем поэтому при $r > r_0$ исходить из уравнения для свободного движения

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = -\frac{ME}{\hbar^2} u_0, \quad r > r_0, \quad (1.3')$$

во внутренней же области ($r < r_0$) в первом приближении пренебречь в уравнении (1.2) E по сравнению с $V(r)$, т. е. заменить уравнение (1.2) при $l=0$ уравнением

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} V(r) u_0. \quad (1.3'')$$

Чтобы «сшить» решения уравнений (1.3') и (1.3''), нужно приравнять значения функции u_0 и её первой

производной u'_0 , даваемые обоими уравнениями, в точке $r=r_0$.

В первом приближении можно считать, что величина

$$\alpha = -\left(\frac{u'_0}{u_0}\right)_{r=r_0} \quad (1.4)$$

не зависит от энергии нейтрона и определяется исключительно свойствами функции $V(r)$ (в частности, α зависит от относительной ориентации спинов нейтрона и протона).

Мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом: необходимо найти решение уравнения (1.3'), отвечающее рассеянию частиц, т. е. имеющее асимптотическую форму (1.2') и удовлетворяющее граничному условию (1.4).

Интересующее нас решение уравнения (1.3') имеет вид

$$u_0 = C \sin(kr + \delta_0).$$

Условие (1.4) даёт:

$$\left(\frac{u'_0}{u_0}\right)_{r=r_0} = k \operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = -\alpha, \quad (1.4')$$

откуда

$$\delta_0 = -\operatorname{arccotg} \frac{\alpha}{k} - kr_0.$$

Так как предполагается, что длина волны нейтрона значительно больше, чем радиус действия ядерных сил, то в первом приближении в формуле (1.4') можно пренебречь членом kr_0 по сравнению с δ_0 .

Мы получим при этом:

$$\sin \delta_0 = -\frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}. \quad (1.5)$$

Дифференциальное сечение рассеяния, согласно (1.1'), равняется:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2 + \alpha^2} \sin \theta d\theta. \quad (1.6')$$

* Об усложнении, вносимом существованием спина, см. ниже.

Интегральное сечение рассеяния равно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{k^2 + \alpha^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{M \left(\frac{E_0}{2} + \varepsilon \right)}, \\ \text{где} \quad \varepsilon &= \frac{(x\hbar)^2}{M} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

(E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе координат).

Величина α определяется потенциалом $V(r)$; в частности, α зависит от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона. При параллельной ориентации спинов мы будем снабжать α индексом 1, при антипараллельной — индексом 0.

Чтобы получить сечение рассеяния неполяризованных нейтронов протонами, нужно помнить, что статистический вес состояния с общим спином, равным единице, в три раза больше веса состояния со спином, равным нулю. Поэтому средний эффективный поперечник рассеяния нейтронов протонами, усреднённый по всем направлениям спинов, может быть представлен в виде^[4]

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \left(\frac{3}{k^2 + \alpha_1^2} + \frac{1}{k^2 + \alpha_0^2} \right) = \\ &= \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\frac{E_0}{2} + \varepsilon'} + \frac{3}{4} \frac{1}{\frac{E_0}{2} + \varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\varepsilon' = \frac{(\alpha_0\hbar)^2}{M}, \quad \varepsilon = \frac{(\alpha_1\hbar)^2}{M}.$$

В следующем параграфе будет показано, что ε представляет собой энергию связи дейтрона.

Формула (1.7) выведена в предположении, что длина волны нейтрона значительно больше, чем радиус действия ядерных сил. (Вывод формулы (1.7) из общего выражения для вероятности ядерных реакций приводится в § 17.)

Мы введём теперь поправку, учитывающую конечность радиуса действия ядерных сил.

Для определённости будем аппроксимировать энергию взаимодействия нейтрона и протона в виде прямоугольной потенциальной ямы, глубина которой равна V_0 и ширина r_0 ; обе эти величины зависят, вообще говоря, от взаимной ориентации спинов частиц.

Волновая функция S -состояния системы нейтрон — протон в области $r \leq r_0$ может быть в этом случае представлена в виде

$$\frac{u_0}{r} = A \frac{\sin \kappa r}{r}, \quad r \leq r_0,$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} [M(V_0 + E)]^{1/2}.$$

При $r \geq r_0$

$$u_0 = B \sin(kr + \delta_0), \quad k = \sqrt{ME}/\hbar.$$

Эти решения нужно «сшить» в точке $r = r_0$. Мы получим при этом:

$$\operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = \frac{\kappa}{k} \operatorname{ctg} \kappa r_0. \quad (1.8)$$

Заметим, что, решая задачу об основном состоянии дейтрона с энергией взаимодействия в виде прямоугольной ямы, мы придём на основании граничного условия (1.4) к соотношению

$$\kappa_0 \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 = -\alpha, \quad (1.9)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\sqrt{M(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}$$

и ε — энергия связи дейтрона (см. § 2).

Так как $kr_0 \ll 1$ и $\alpha \ll \kappa_0$, то мы можем разложить κ и $\kappa \operatorname{ctg} \kappa r_0$ в ряд по степеням k и α :

$$\kappa = \kappa_0 + \frac{\alpha^2 + k^2}{2\kappa_0},$$

$$\kappa \operatorname{ctg} \kappa r_0 = \kappa_0 \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 + \frac{\alpha^2 + k^2}{2\kappa_0} (\operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 - \kappa_0 r_0 \sin^{-2} \kappa_0 r_0).$$

Замечая, что $\operatorname{ctg} \alpha_0 r_0 \ll 1$ и $\sin \alpha_0 r_0 \approx 1$, получим:

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha r_0 = \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 r_0 - \frac{\alpha^2 + k^2}{2\alpha_0} = -\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + k^2) r_0. \quad (1.9')$$

Подставляя (1.9') в правую часть равенства (1.8) и разлагая $\operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0)$ в ряд, получим:

$$\operatorname{ctg} \delta_0 - \frac{kr_0}{\sin^2 \delta_0} = -\frac{\alpha}{k} - \frac{(\alpha^2 + k^2) r_0}{2k}.$$

В первом приближении (когда r_0 считается равным нулю) $\operatorname{ctg} \delta_0 \approx -\frac{\alpha}{k}$ и $\sin^{-2} \delta_0 \approx 1 + \frac{\alpha^2}{k^2}$. В следующем приближении

$$\operatorname{ctg} \delta_0 \approx -\frac{\alpha}{k} + kr_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) - \frac{\alpha^2 + k^2}{2k} r_0 \approx -\frac{\alpha}{k} + \frac{(\alpha^2 + k^2) r_0}{2k}.$$

Сечение рассеяния, согласно (1.6'), может быть представлено в виде

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi(1 + \alpha r_0)}{\alpha^2 + k^2}. \quad (1.6'')$$

Эта формула показывает, что, учитывая конечность радиуса действия ядерных сил, мы получим вместо (1.7) следующую формулу для сечения рассеяния нейтронов протонами*):

$$\sigma = \frac{4\pi \hbar^2}{M} \left(\frac{1}{4} \frac{1 + \alpha_0 r_0}{E_0 + \varepsilon'} + \frac{3}{4} \frac{1 + \alpha_1 r_0}{E_0 + \varepsilon} \right), \quad (1.7')$$

где r_0 по порядку величины определяет радиус действия ядерных сил (см. также § 17).

Величина ε' по порядку величины составляет около 100 keV, $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см [115].

Выше мы всё время считали, что величина α , входящая в граничное условие (1.4), не зависит от энергии. Это верно, однако, только в первом приближении. Можно показать, что учёт зависимости α от энергии нейтрона эквивалентен введению конечного радиуса действия ядерных сил в выражение для сечения рассеяния [5].

*) Здесь для простоты считается, что радиус действия ядерных сил одинаков в триплетном и синглетном состояниях, что по всей вероятности, не отвечает действительности (см. § 3).

Существенным является то обстоятельство, что ввиду малости величины $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{M}$ по сравнению с ядерными энергиями в разложении α в ряд по степеням энергии нейтрона первый член мал, и поэтому второй член оказывается сравнимым с первым. Сохраняя первые два члена в разложении α по степеням E , мы получим:

$$\alpha_0 = A_0 + B_0 E, \\ \alpha_1 = A_1 + B_1 E.$$

Формула (1.7) для сечения рассеяния нейтронов протонами с этими значениями α приобретает вид

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{M} \left\{ \frac{3}{(A_1 + B_1 E)^2 + \frac{E}{2}} + \frac{1}{(A_0 + B_0 E)^2 + \frac{E}{2}} \right\}. \quad (1.7'')$$

Если пренебречь в знаменателе членами, содержащими E^2 , и ввести обозначения

$$\frac{A_1^2}{2A_1 B_1 + \frac{1}{2}} = \varepsilon, \quad \frac{A_0^2}{2A_0 B_0 + \frac{1}{2}} = \varepsilon', \\ \frac{1}{2A_1 B_1 + \frac{1}{2}} = 1 + \alpha_1 r_0, \quad \frac{1}{2A_0 B_0 + \frac{1}{2}} = 1 + \alpha_0 r_0,$$

то формула (1.7'') примет вид (1.7'). Заметим, однако, что в действительности нельзя пренебрегать величиной E^2 в знаменателе (1.7''); формула (1.7'') лучше согласуется с экспериментальными данными, чем формула (1.7'). При этом в (1.7'') следует считать, что $A_1 = -1,22$, $A_0 = 0,27$, $B_1 = B_0 = 0,06$ [115].

§ 2. Классификация состояний системы нейтрон-протон и основное состояние дейтрона. Если отвлечься от спина и считать, что между нейтроном и протоном действуют центральные силы, то можно утверждать, что основному состоянию дейтрона отвечает момент относительного количества движения нейтрона и протона, равный нулю*). Иными словами, основным состоянием дейтрона будет S -состояние.

*) См. любой курс квантовой механики.

Учитывая спин частиц, мы должны различать триплетное (3S) и синглетное (1S) S -состояния соответственно тому, параллельны или антипараллельны спины нейтрона и протона.

Естественно возникает вопрос, оба ли эти состояния осуществляются в дейтроне. Опыты по рассеянию нейтронов протонами, в особенности по рассеянию медленных нейтронов в молекулярном пара- и ортоводороде, а также рассмотрение захвата нейтронов протонами приводят к заключению, что основным состоянием дейтрона является триплетное состояние и что синглетное состояние в дейтроне не осуществляется.

Мы покажем теперь, что величина ε представляет собой энергию связи дейтрона.

Согласно сказанному выше, волновое уравнение основного состояния дейтрона можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} (\eta + V) u, \quad (2.1)$$

где $u = r\psi$ (ψ — волновая функция дейтрона, которая в S -состоянии зависит только от расстояния r между нейтроном и протоном, η — энергия связи дейтрона и V — потенциальная энергия).

Это уравнение вне области действия ядерных сил ($r > r_0$) можно представить в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M\eta}{\hbar^2} u. \quad (2.2')$$

Внутри области действия ядерных сил можно пренебречь энергией связи η по сравнению с V . Поэтому в этой области уравнение (2.1) можно заменить уравнением

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} V u, \quad r \leq r_0.$$

Решение этого уравнения следует «сшить» с решением уравнения (2.2') при $r \approx r_0$. Такое «сшивание» означает, что при $r = r_0$ должно выполняться некоторое граничное условие, а именно — условие вида (1.4). Можно утверждать, что константа α должна иметь то же значение, что и при решении задачи о рассеянии нейтро-

нов протонами, так как она находится из решения уравнения Шредингера во внутренней области ($r < r_0$), а в это уравнение не входит ни энергия нейтрона, ни энергия связи дейтрона.

Различие между обеими задачами заключается лишь в том, что при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами система нейтрон — протон имеет положительную энергию, в то время как при рассмотрении задачи об основном состоянии дейтрона мы имеем дело с отрицательной энергией. С этим связано различное асимптотическое поведение волновых функций обеих задач. В задаче о рассеянии волновая функция на бесконечности осциллирует и отлична от нуля, в задаче же об основном состоянии дейтрона она обращается в нуль.

Подчеркнём ещё раз, что использование одного и того же граничного условия с одной и той же константой α является следствием малости энергии связи дейтрона и энергии относительного движения нейтрона и протона по сравнению с эффективной потенциальной энергией взаимодействия нейтрона и протона. В силу этого α выступает как некоторая константа, характеризующая взаимодействие нейтрона и протона.

Интересующее нас решение уравнения (2.2') имеет следующий вид:

$$u = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\sqrt{M\eta}}{\hbar} r}. \quad (2.2)$$

Граничное условие (1.4) даёт:

$$\frac{\sqrt{M\eta}}{\hbar} = \alpha. \quad (2.2'')$$

Сравнение этого соотношения с (1.6) показывает, что η совпадает с ε , т. е. что ε действительно представляет собой энергию связи. Формула (2.2'') показывает далее, что величина α , входящая в выражение для сечения рассеяния нейтрона протонами, является существенно положительной. Иными словами, связанному состоянию отвечает положительный знак величины α . (Напомним, что α определяется как логарифмическая производная радиальной волновой функции в точке $r = r_0$ (см. 1.4).)

Так как не существует состояний дейтрона с противоположно ориентированными спинами нейтрона и протона, то величина α_0 должна быть отрицательной:

$$\alpha_0 < 0.$$

Ниже мы увидим, что, рассматривая рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде, можно убедиться в справедливости этого утверждения.

Заметим, что дейтрон не имеет возбуждённых состояний. Это связано с тем, что энергия связи единственного S -уровня (3S_1) аномально мала, почти равна нулю по сравнению с ядерными энергиями. Отсюда можно заключить, что очень мало вероятно существование возбуждённых состояний дейтрона с не равным нулю моментом количества движения. Обычно такие уровни расположены значительно выше S -уровня, так как в состояниях с отличным от нуля орбитальным моментом добавляется центробежная энергия.

Только в том случае, если бы между спином и орбитой существовало такое взаимодействие, которое приводило бы к почти полной компенсации действия центробежной энергии, можно было бы ожидать существования возбуждённых состояний дейтрона с отличным от нуля орбитальным моментом. Эксперименты не указывают на существование возбуждённых состояний, откуда следует, что такая маловероятная компенсация действия центробежной энергии не имеет места.

Оценим теперь эффективную величину потенциальной энергии V .

Принтегрируем уравнение (2.1) в пределах от $r=0$ до $r=r_0$ (величина r_0 определяет область действия ядерных сил, т. е. $V(r) \approx 0$ при $r > r_0$):

$$(u')_{r=r_0} - (u')_{r=0} = \frac{M}{\hbar^2} \int_0^{r_0} V(r) u \, dr + \frac{M\varepsilon}{\hbar^2} \int_0^{r_0} u \, dr. \quad (2.3)$$

Значение производной u' в точке $r=r_0$ меньше значения u' в точке $r=0$, так как при $r \approx r_0$ функция u начинает убывать (и обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$).

Внутри области действия сил, при $r < r_0$, величина потенциальной энергии значительно больше энергии связи нейтрона, т. е. $|V| \gg \varepsilon$. Мы можем поэтому для получения оценки пренебречь первым слагаемым в левой части и вторым слагаемым в правой части уравнения (2.3).

Замечая ещё, что при малых r функция u ведёт себя, как $\text{const} \cdot r$ (в общем случае радиальная функция u_l , отвечающая моменту l , ведёт себя при $r \rightarrow 0$, как $\text{const} \cdot r^{l+1}$ *)), мы получим по порядку величины:

$$\int_0^{r_0} V(r) r \, dr \approx -\frac{\hbar^2}{M}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что глубина ямы V_0 и её ширина r_0 связаны приближённым соотношением

$$V_0 r_0^2 \approx \frac{\hbar^2}{M} \quad (2.4')$$

(в случае прямоугольной ямы $V_0 r_0^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}$).

Полагая $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см, мы получим $V_0 \approx 40 \text{ MeV}$ ^{[5], [6]}.

Выше мы предполагали силы между нейтроном и протоном центральными и поэтому считали основным состоянием дейтрона S -состояние (точнее 3S_1 -состояние).

Известно, что волновая функция S -состояния является сферически симметричной. Отсюда следует, что распределение заряда в дейтроне должно быть также сферически симметричным. Между тем, дейтрон обладает квадрупольным моментом, что указывает на отклонение распределения заряда от сферической симметрии.

Это значит, что основное состояние дейтрона не может описываться чистой S -волной. Оно должно представлять собой суперпозицию S -волны и волн, отвечающих отличным от нуля моментам количества движения, которые и создают отклонение в распределении заряда от сферической симметрии.

Мы покажем сейчас, что учёт сил, зависящих от ориентации спинов нейтрона и протона по отношению к радиусу-

*) См. любой курс квантовой механики.

вектору, соединяющему частицы, приводит к нужной асимметрии *).

Предварительно мы рассмотрим общий вопрос о классификации состояний системы, состоящей из нейтрона и протона.

Наличие сил, зависящих от ориентации спинов нейтрона и протона, может привести к существенному изменению свойств симметрии гамильтониана системы. В случае действия обычных центральных сил гамильтониан системы, состоящей из двух частиц, инвариантен по отношению к пространственным вращениям. С этим связано сохранение орбитального момента количества движения частиц и возможность классификации состояний системы по значениям момента l . В общем случае, когда силы зависят от спина частиц, гамильтониан не инвариантен по отношению к вращениям одних только пространственных координат.

Инвариантность гамильтониана сохраняется по отношению к вращениям как обычных, так и спиновых координат. С этой инвариантностью связано сохранение общего момента количества движения J , складывающегося из орбитального и спинового моментов. Последние порознь, вообще говоря, не сохраняются, и поэтому возможность классификации состояний по значениям орбитального момента при этом отпадает.

Хотя в общем случае любого числа частиц орбитальный и спиновый моменты порознь не сохраняются, в системе, состоящей из двух частиц, обладающих спином, равным $1/2$, величина полного спина S представляет собой константу движения.

В этом можно убедиться, если сделать естественное предположение о том, что гамильтониан системы, состоящей из двух частиц, симметричен относительно их спинов. В силу этой симметрии стационарные состояния могут быть либо симметричными, либо антисимметричными относительно спиновых координат.

*) Ниже излагаются основные результаты работы Швингера и Рариты [7] по этому вопросу. См. также работу Гепнера и Пайерлса [8].

Симметричные состояния являются триплетными и соответствуют значению спина S , равному единице, антисимметричные состояния являются синглетными с $S=0$.

В справедливости высказанного выше утверждения о постоянстве величины S можно убедиться также следующим образом.

Гамильтониан системы двух частиц, обладающих спином, равным $1/2$, может содержать спины частиц только в двух комбинациях:

$$\sigma_1 \sigma_2, \quad S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 r) \cdot (\sigma_2 r)}{r^2} - \sigma_1 \sigma_2, \quad (2.5)$$

где σ_1, σ_2 — матрицы Паули для обеих частиц и r — вектор расстояния между ними.

Это связано с тем, что операторы (2.5) инвариантны по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, причём, как мы сейчас покажем, любой оператор, характеризующийся такой инвариантностью, может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов (2.5). Так как гамильтониан системы двух частиц инвариантен по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, то он также может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов $\sigma_1 \sigma_2$ и S_{12} .

Покажем, что операторы (2.5) отличаются следующим замечательным свойством: любая целая положительная степень каждого из операторов, так же как и произведения таких степеней, могут быть представлены в виде линейной комбинации самих операторов и единичной матрицы.

Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего соотношение [9]

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = 3 - 2\sigma_1 \sigma_2,$$

которое легко выводится, если воспользоваться свойствами матриц Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Из этого соотношения следует, что любая целая положительная степень оператора $\sigma_1 \sigma_2$ выражается в виде линейной комбинации, содержащей оператор $\sigma_1 \sigma_2$ и единичную матрицу.

Далее легко показать, что имеют место соотношения

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} = S_{12}, \quad S_{12} \cdot \sigma_1 \sigma_2 = S_{12}.$$

Действительно, направим ось x вдоль вектора $n = r/r$. Оператор $\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12}$ приобретает при этом вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} &= \sigma_1 \sigma_2 \{3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2\} = \\ &= 3\{1 - \sigma_{1z}\sigma_{2z} - \sigma_{1y}\sigma_{2y}\} - 3 + 2\sigma_1 \sigma_2 = \\ &= 3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2 = S_{12}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Покажем, наконец, что степени S_{12} выражаются через S_{12} и $\sigma_1 \sigma_2$. Рассмотрим, например, оператор S_{12}^2 :

$$S_{12}^2 = 9(\sigma_1 n)^2 (\sigma_2 n)^2 - 6(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) \sigma_1 \sigma_2 + (\sigma_1 \sigma_2)^2.$$

Так как

$$3(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) \sigma_1 \sigma_2 = S_{12} + (\sigma_1 \sigma_2)^2,$$

то

$$S_{12}^2 = 9 - 2S_{12} - (\sigma_1 \sigma_2)^2 = 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2.$$

Отсюда следует, что любая целая положительная степень S_{12} выражается через S_{12} , $\sigma_1 \sigma_2$ и единичную матрицу.

Итак, мы показали, что имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2)^2 &= 3 - 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12}^2 &= 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12} \sigma_1 \sigma_2 &= S_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

которые и доказывают отмеченное выше свойство операторов S_{12} и $\sigma_1 \sigma_2$.

Эти соотношения показывают, что наиболее общее выражение оператора потенциальной энергии системы нейтрон + протон, симметричного в спинах частиц и инвариантного по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, имеет вид [7]

$$V = - \left\{ 1 - \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g\sigma_1 \sigma_2 + \gamma S_{12} \right\} U(r), \quad (2.7)$$

где g , γ и U суть некоторые функции расстояния между частицами.

Вводя в рассмотрение вектор общего спина системы

$$S = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

можно представить операторы $\sigma_1 \sigma_2$ и S_{12} в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= 2S^2 - 3, \\ S_{12} &= 6 \frac{(Sr)^2}{r^2} - 2S^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.6')$$

Пользуясь представлением (2.6'), мы непосредственно убеждаемся в том, что оператор S^2 коммутирует с операторами $\sigma_1 \sigma_2$ и S_{12} , а, следовательно, и с гамильтонианом системы. Это значит, что S^2 представляет собой константу движения, как и утверждалось выше.

Соотношения (2.6') показывают, что в синглетном состоянии ($S=0$) S_{12} равно нулю. В триплетном состоянии ($S=1$) оператор S_{12} можно записать в виде

$$S_{12} = 6 \frac{(Sr)^2}{r^2} - 4. \quad (2.6'')$$

Отметим, что собственное значение $\sigma_1 \sigma_2$ в триплетном состоянии равно единице, а в синглетном — 3 [см. первую из формул (2.6)].

Собственные значения оператора S_{12} суть 2, 2, -4 [в этом можно убедиться из рассмотрения второго соотношения (2.6)]. Сумма этих значений равна нулю.

Итак, мы видим, что систему, состоящую из нейтрона и протона, можно характеризовать заданием квантовых чисел J и S .

Сюда следует добавить магнитное квантовое число m , т. е. проекцию полного момента количества движения J на некоторую ось, а также четность состояния ω , представляющую собой собственное значение оператора отражения (замены r на $-r$). Эти четыре квантовых числа J , S , m , ω могут служить для классификации состояний системы нейтрон + протон.

В синглетном состоянии ($S=0$) сохраняется орбитальный момент количества движения l . Поэтому такие состояния можно классифицировать по величине l .

Триплетное состояние, характеризующееся определённым значением полного момента J , можно трактовать как суперпозицию ряда состояний с различными значениями l , совместимыми с общими правилами сложения моментов. Так, например, триплетное состояние с $J=1$ представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 , 3P_1 , 3D_1 . Чётность состояния равна, как известно, $w=(-1)^l$. Поэтому для состояний 3S_1 и 3D_1 чётность $w=1$, для состояния 3P_1 чётность $w=-1$.

Ниже приведена классификация нескольких первых триплетных состояний [7].

Классификация триплетных состояний

J	Чётность	
	$w=1$	$w=-1$
0		3P_0
1	${}^3S_1 + {}^3D_1$	3P_1
2	3D_2	${}^3P_2 + {}^3F_2$
3	${}^3D_3 + {}^3G_3$	3F_3

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса об основном состоянии дейтрона.

Мы говорили выше, что из опытов по рассеянию нейтронов протонами (главным образом, в орто- и параводороде), а также из других данных следует, что в основном состоянии дейтрона спины нейтрона и протона параллельны. Мы можем, исходя из этих данных, считать, что в основном состоянии общий момент количества движения дейтрона равняется единице.

Будем считать основное состояние дейтрона чётным*) ($w=1$). Согласно приведённой выше таблице,

*) Если предположить, что чётность основного состояния $w=-1$, то, как видно из приведённой выше таблицы, волновая функция основного состояния дейтрона не будет содержать S -волны. Такая функция будет слишком асимметричной, между тем как из вели-

основным состоянием дейтрона следует считать суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Наличие 3D_1 -волны приводит к отклонению распределения заряда в дейтроне от сферической симметрии, иными словами, благодаря присутствию D -волны дейтрон будет обладать квадрупольным электрическим моментом.

Квадрупольный момент представляет собой усреднённое по асимметричному распределению заряда значение величины $\frac{1}{4}(3z^2 - r^2)$ (ось z определяется таким образом, что проекция полного момента на эту ось равна $m=1$); множитель $1/4$ возникает по той причине, что радиус-вектор заряженной частицы — протона — равен $r/2$.

По данным Раби и др. [10], квадрупольный момент дейтрона равен:

$$Q = +(2,73 \pm 0,05) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$$

(положительный знак Q означает, что распределение заряда «вытянуто» вдоль направления общего спина дейтрона).

Таким образом существование квадрупольного момента дейтрона является указанием на нецентральность ядерных сил, которая приводит к установлению связи между волнами 3D_1 и 3S_1 .

Зная величину квадрупольного момента дейтрона, можно оценить веса состояний 3D_1 и 3S_1 . Чтобы произвести эту оценку, рассмотрим волновую функцию состояния ${}^3S_1 + {}^3D_1$. Покажем, что нормированная часть волновой функции 3D_1 -состояния, содержащая спиновые и угловые переменные, может быть представлена в виде

$$\frac{1}{4}(2\pi)^{-1/2} S_{12} \chi_1^m, \quad (2.8')$$

где χ_1^m — нормированная спиновая функция, относящаяся к триплетному состоянию с магнитным квантовым чис-

лами квадрупольного момента дейтрона следует, что асимметрия в распределении зарядов очень невелика. Отсюда видно, что S -волна должна обязательно присутствовать в основном состоянии дейтрона.

лом m (m — проекция общего момента на ось квантования, принимающая значения $m = -1, 0, +1$).

Заметим для этого, что три функции χ_1^m преобразуются при вращениях спиновых координат по представлению, характеризующему момент, равный единице. Так как оператор S_{12} инвариантен по отношению к вращениям обычных и спиновых координат, то три функции $S_{12}\chi_1^m$ также преобразуются по представлению, характеризующему $J=1$. Иными словами, $S_{12}\chi_1^m$ описывает триплетное состояние с общим моментом $J=1$.

Остаётся показать, что функция $S_{12}\chi_1^m$ описывает именно D -волну.

Известно, что если некоторая функция от углов $Y(\theta, \varphi)$, умноженная на r^l (l — целое число), удовлетворяет уравнению Лапласа, то она описывает волну с орбитальным моментом, равным $l(l+1)$. Поэтому нам достаточно показать, что $S_{12}\chi_1^m$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(r^2 S_{12}\chi_1^m) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Подставляя сюда выражение для S_{12} , получим:

$$\Delta(3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r - r^2 \sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = (6\sigma_1 \sigma_2 - 6\sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = 0,$$

что и требовалось доказать.

Итак, функция $S_{12}\chi_1^m$ описывает именно 3D_1 -состояние с моментом $J=1$. Чтобы убедиться в правильности нормировки функции (2.8'), достаточно вспомнить второе из соотношений (2.6) и заметить, что интеграл по углам от $S_{12}\chi_1^m$ обращается в нуль.

Обозначая радиальные функции S - и D -волн соответственно через $\frac{u(r)}{r}$ и $\frac{w(r)}{r}$ и замечая, что в состоянии с $S=1$ оператор $\sigma_1 \sigma_2$ можно заменить единицей, мы можем записать ψ -функцию состояния ${}^3S_1 + {}^3D_1$ в виде

$$\psi = (4\pi)^{-1/2} \left\{ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} \left(\frac{3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r}{r^2} - 1 \right) \frac{w}{r} \right\} \chi_1^m. \quad (2.8)$$

Условие нормировки волновой функции гласит:

$$\int_0^\infty (u^2 + w^2) dr = 1. \quad (2.8'')$$

При такой нормировке значение интеграла $\int_0^\infty w^2 dr$ представляет собой, очевидно, вероятность нахождения дейтрона в состоянии 3D_1 .

Мы можем теперь написать выражение для квадратурного момента Q в состоянии с $m=1$:

$$Q = \int \psi^* \frac{1}{4} (3z^2 - r^2) \psi dV = \frac{V\sqrt{2}}{40} \int_0^\infty r^2 (uw - 2^{-3/2} w^2) dr. \quad (2.9)$$

Для вычисления Q нужно знать радиальные функции u и w . Нахождение последних требует определённых предположений о виде потенциальной энергии.

Если воспользоваться [7] выражением (2.7) для потенциальной энергии, то уравнение Шредингера для триплетного основного состояния дейтрона примет вид

$$-\varepsilon \psi = \frac{\hbar^2}{M} \Delta \psi - \left[1 + \gamma \left(\frac{3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r}{r^2} - 1 \right) \right] U(r) \psi, \quad (2.10)$$

где ε — энергия связи дейтрона.

После подстановки сюда ψ в виде (2.8) и использования соотношений (2.6) уравнение (2.10) расщепляется на два уравнения для u и w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} [-\varepsilon + U] u &= -2^{3/2} \gamma \frac{M}{\hbar^2} U w, \\ \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6w}{r^2} + \frac{M}{\hbar^2} [-\varepsilon + (1-2\gamma)U] w &= -2^{3/2} \gamma \frac{M}{\hbar^2} U u. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Вне области действия ядерных сил решения этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u &= A e^{-\alpha r}, \\ w &= B e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{3}{\alpha r} + \frac{3}{(\alpha r)^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}}$, а A, B — константы.

В области действия ядерных сил решение уравнений (2.11) существенно зависит от вида функций γ и U , которые нам неизвестны. Поэтому отношение констант

A и B , которое определяется весом D -волны, не может быть найдено теоретически. Можно, однако, определить вес D -состояния, если оценить квадрупольный момент дейтрона по формуле (2.9) и сравнить затем полученное значение с экспериментальным.

Для оценки Q по порядку величины можно в интеграл (2.9) в качестве функций u и w подставить выражения (2.12), справедливые вне области действия ядерных сил, и пренебречь при этом малым членом w^2 . То обстоятельство, что внутри области действия ядерных сил выражениями (2.12) нельзя пользоваться, не может сильно повлиять на результат, так как в интеграле (2.9) расстояния $\leq r_0$ не играют исключительной роли; область эффективных значений r в выражении для Q порядка $1/a$, что в несколько раз превышает r_0 .

Результаты расчётов [7] показывают, что для получения наблюдаемого значения квадрупольного момента дейтрона необходимо считать вероятность нахождения дейтрона в 3D_1 -состоянии порядка нескольких процентов

$$\int_0^\infty w^2 dr \cong 0,04.$$

Заметим, что вес состояния 3D_1 входит также в выражение для магнитного момента дейтрона. Это связано с тем, что в состоянии ${}^3S_1 + {}^3D_1$ магнитный момент не равен сумме собственных магнитных моментов нейтрона и протона, так как благодаря «примеси» D -волны орбитальный момент также вносит свою долю в величину магнитного момента дейтрона.

Оператор магнитного момента дейтрона M , выраженный в ядерных магнетонах $\left(\frac{e\hbar}{2Mc}\right)$, имеет вид

$$M = \mu_n \sigma_n + \mu_p \sigma_p + \frac{1}{2} L, \quad (2.13)$$

где μ_n и μ_p — магнитные моменты нейтрона и протона в единицах $\frac{e\hbar}{2Mc}$, σ_n и σ_p — спинные матрицы Паули для нейтрона и протона и L — оператор орбитального момента (множитель $1/2$ при орбитальном моменте учи-

тывается тот факт, что только одна из двух частиц, образующих дейтрон — протон, обладает зарядом).

Вводя спинный и полный моменты количества движения S и J , перепишем M в виде

$$M = \frac{1}{2} J + \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) S + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\sigma_n - \sigma_p), \quad (2.13')$$

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_n + \sigma_p).$$

В триплетном состоянии диагональные матричные элементы $\sigma_n - \sigma_p$ равны, очевидно, нулю (оператор $\sigma_n - \sigma_p$ антисимметричен относительно спинных координат, в то время как спинные волновые функции — симметричны), поэтому последнее слагаемое можно вовсе не учитывать.

Далее вектор S может быть заменён своей проекцией вдоль направления J^* , т. е.

$$S \rightarrow J \frac{SJ}{J^2} = J \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} = J \frac{4 - L^2}{4} \quad (2.13'')$$

(мы заменили операторы J^2 и S^2 их собственными значениями, равными 2).

Пользуясь (2.13''), перепишем (2.13') в виде

$$M = J \left[\mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) L^2 \right]. \quad (2.14)$$

*) Смысл замены оператора S оператором $J \frac{SJ}{J^2}$ заключается в том, что матричные элементы обоих операторов, отвечающие переходам, при которых $J^2 = J(J+1)$ не изменяется, равны между собой.

Доказательство этого утверждения вытекает из соотношения [12]

$$J^2 T - 2J^2 T J^2 + T J^4 = 2\hbar^2 (J^2 T + T J^2) - 4\hbar^2 J (J T), \quad (*)$$

где T — произвольный оператор со свойствами момента, коммутирующий с оператором $J - T$.

В частности, в качестве T можно взять оператор S .

Рассматривая матричные элементы T , диагональные по отношению к J , получим из (*):

$$(T)_{\alpha, J, m'; \alpha', J, m} = \frac{1}{J(J+1)} (J (J T))_{\alpha, J, m; \alpha', J, m'},$$

где α — совокупность собственных значений операторов, коммутирующих с J^2 и J_z .

Заменяя здесь T на S , мы и получим приведённое в тексте соотношение.

Так как среднее значение L^2 равно $2 \cdot 3 \cdot \int_0^\infty \omega^2 dr$, то выражение для магнитного момента дейтрона приобретает окончательно следующий вид:

$$\mu_D = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty \omega^2 dr. \quad (2.15)$$

Мы видим, что вклад орбитального движения в выражение для момента дейтрона пропорционален $\int_0^\infty \omega^2 dr$, т. е. очень мал. В первом приближении магнитный момент дейтрона равен просто сумме моментов нейтрона и протона.

Из (2.15) следует, что

$$\mu_D = \frac{\frac{3}{4} \int_0^\infty \omega^2 dr}{1 - \frac{3}{2} \int_0^\infty \omega^2 dr} - \mu_p. \quad (2.15')$$

Имеющиеся экспериментальные данные с несомненностью указывают, что магнитный момент дейтрона не равен алгебраической сумме моментов протона и нейтрона. Именно, экспериментально найдено, что [131*])

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2,7896, \\ \mu_D &= 0,85647, \\ \mu_n &= -1,9103. \end{aligned}$$

Если считать вес D -волны равным 4%, то из формулы (2.15') мы получим, используя указанные выше

*) Магнитный момент нейтрона был впервые определен Альваресом и Блохом [14], которые получили для него значение $\mu_n = -1,935 \pm 0,03$. Указанное в тексте значение μ_n также получено по методу Альвареса и Блоха; ошибка в этом значении μ_n составляет 0,001.

значения для μ_p и μ_D , значение магнитного момента нейтрона, равное $\mu_n = -1,9108$. Согласие между вычисленным и найденным экспериментально значением μ_n можно считать удовлетворительным.

Итак, мы видим, что «примесь» D -волны в основном состоянии дейтрона очень невелика. Поэтому при рассмотрении многих вопросов можно считать основным состоянием дейтрона состояние 3S_1 . В частности, без особой погрешности можно исходить из этого предположения при рассмотрении рассеяния медленных нейтронов протонами, что мы и делали выше.

Отметим, что под влиянием обычного магнитного взаимодействия нейтрона и протона (энергия этого взаи-

действия имеет вид $V = -\frac{\mu_n \mu_p}{r^3} S_{12}$) возникают некоторые изменения в характере рассеяния медленных нейтронов протонами. Во-первых, в триплетном состоянии угловое распределение рассеянных нейтронов становится не вполне изотропным и, во-вторых, появляется зависимость сечения рассеяния от проекции спина m на направление импульса падающих нейтронов. При этом состоянии с $|m|=1$ и $m=0$ несколько отличаются в смысле асимметрии рассеяния. Однако отклонение от сферической симметрии столь незначительно, что мы в дальнейшем не будем учитывать этот эффект.

§ 3. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде. Мы вернемся теперь к рассмотрению вопроса о возможности существования состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона. Этот вопрос сводится к определению знака величины α_0 . Согласно соотношению (2.2') только положительный знак α отвечает связанному состоянию нейтрона и протона.

Изучая рассеяние нейтронов свободными протонами, нельзя определить знак α , так как сечение рассеяния определяется квадратом α . Оказывается, что можно определить знак величины α_0 , изучая рассеяние нейтронов в молекулярном водороде, т. е. в пара- и ортоводороде *).

*) Мы следуем ниже изложению Швингера и Теллера [15].

Известно, что протоны, образующие молекулу орто-водорода, имеют параллельно направленные спины, в то время как спины протонов в молекуле параводорода антипараллельны.

Рассмотрим рассеяние медленных нейтронов в молекулярном водороде, предполагая, что длина волны нейтронов сравнима с расстоянием между протонами, образующими молекулу водорода.

В этом случае должны иметь место интерференционные явления, связанные с рассеянием нейтронов обоими протонами молекулы.

Предположим, что энергия нейтронов недостаточна для возбуждения ротационных уровней молекулы.

Происходящее в этих условиях упругое (без изменения энергии) рассеяние нейтронов будет отличаться для пара- и ортоводорода, если взаимодействие нейтрона и протона зависит от относительной ориентации их спинов и будет одинаковым при не зависящих от спинов ядерных силах*).

Отсюда следует, что, изучая рассеяние очень медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, можно получить важные сведения о величинах α_1 и α_0 .

Переходя к определению сечений рассеяния медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, покажем предварительно, что при рассмотрении различных процессов рассеяния нейтронов можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, если только надлежащим образом выбрать потенциал возмущения^[16].

Достаточно показать, что это утверждение справедливо в случае рассеяния нейтронов свободными протонами. Предполагая, что можно пользоваться теорией возмущений, мы получим следующую формулу для

*) Если нейтрон обладает энергией, достаточной для возбуждения ротационных уровней молекулы водорода, то рассеяние нейтронов в параводороде будет отличаться от рассеяния в ортоводороде даже при не зависящих от относительной ориентации спинов ядерных силах. Это связано с тем, что ротационные уровни молекул пара- и ортоводорода отличаются друг от друга: ротационное квантовое число J для параводорода может быть только четным, для ортоводорода — нечетным.

амплитуды рассеяния нейтронов свободными протонами^[17]:

$$f(\theta) = -\frac{M}{4\pi\hbar^2} \int U(r) e^{i\hbar^{-1}(p-p_0)r} dV. \quad (3.1)$$

Здесь r — радиус-вектор, определяющий относительное положение нейтрона и протона, p_0 и p — импульсы частицы до и после столкновения ($p_0 = p$) и $U(r)$ — некоторый фиктивный потенциал взаимодействия между нейтроном и протоном, который, как мы сейчас покажем, можно выбрать таким образом, что выражение (3.1) будет совпадать с точным значением амплитуды рассеяния. Последняя, как известно, для медленных нейтронов не зависит от угла рассеяния θ .

Для того чтобы рассеяние отличалось этим свойством, необходимо считать радиус действия сил r_0 в выражении (3.1) малым по сравнению с длиной волны частиц λ :

$$r_0 \ll \lambda. \quad (3.2)$$

Выберем фиктивный потенциал в виде прямоугольной потенциальной ямы. Обозначая глубину ямы через U_0 , мы получим из (3.1) при выполнении условия (3.2)

$$a = f(\theta) \approx \frac{M}{\hbar^2} U_0 r_0^3, \quad (3.3)$$

где амплитуда рассеяния a связана с сечением рассеяния нейтронов свободными протонами соотношением

$$\sigma_0 = 4\pi a^2.$$

С другой стороны, для применимости борновского приближения, которым мы пользуемся, необходимо выполнение условия^[17]

$$U_0 \ll E = \frac{\hbar^2}{M\lambda^2}. \quad (3.4)$$

Выясним, могут ли одновременно выполняться все эти условия. Из (3.3) и (3.2) следует, что

$$U_0 = \frac{\hbar^2}{M} \frac{a}{r_0^3} \gg \frac{\hbar^2}{M} \frac{a}{\lambda^3}. \quad (3.5)$$

Неравенства (3.4), (3.5) приводят к условию

$$a \ll \lambda. \quad (3.6)$$

Так как $a \approx 10^{-12}$ см, то условие (3.6) выполняется, если энергия нейтрона меньше нескольких MeV. Вплоть до таких энергий можно, следовательно, пользоваться теорией возмущений.

Мы будем в дальнейшем, пользуясь теорией возмущений, записывать энергию взаимодействия нейтрона и протона в виде

$$\text{const. } \delta(r_n - r_p), \quad (3.7)$$

где r_n и r_p — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и протона (const. не зависит от координат обеих частиц), а δ — дельта-функция Дирака.

Написанное выражение означает, что координаты нейтрона и протона должны совпадать для того, чтобы эти частицы взаимодействовали; иными словами, радиус действия ядерных сил считается при этом равным нулю. Представление энергии взаимодействия в виде (3.7) является законным, так как радиус действий ядерных сил мал по сравнению с длиной волны.

Пользуясь энергией взаимодействия в виде (3.7), мы получим сферически симметричное рассеяние, как и должно быть в случае рассеяния медленных нейтронов.

Определим величину const. в формуле (3.7). Подставляя (3.7) вместо U в формулу (3.1), получим:

$$\text{const.} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a. \quad (3.7')$$

Амплитуда рассеяния a может быть представлена в виде

$$a = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta} - 1),$$

где δ — фаза на бесконечности для S -волны, определяемая согласно формуле (1.4'). Из формулы (1.4') видно, что для медленных нейтронов, когда $k \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, если $\alpha < 0$, причём $\delta > 0$ и $\delta \rightarrow \pi$, если $\alpha > 0$, причём $\delta < \pi$. Отсюда следует, что при $\alpha < 0$

$$a \approx \frac{\delta}{k} > 0,$$

а при $\alpha > 0$

$$a \approx \frac{\delta - \pi}{k} < 0.$$

Полагая в формуле (1.6'') для сечения рассеяния медленных нейтронов протонами $k \rightarrow 0$, мы получим

$$a = \mp \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha r_0}, \quad (3.8)$$

где знак — или + следует брать в зависимости от того, больше или меньше нуля величина α .

Величины a и α мы снабжаем в дальнейшем индексом 0 или 1, в зависимости от того, является ли состояние системы нейтрон + протон синглетным или триплетным.

Итак, мы видим, что при рассмотрении различных процессов рассеяния медленных нейтронов можно пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$-\frac{4\pi\hbar^2}{M} a \delta(r_n - r_p). \quad (3.9)$$

Введём в рассмотрение оператор Q , собственное значение которого равно +1 в триплетном состоянии и —1 в синглетном состоянии. Такой оператор можно представить в виде*)

$$Q = \frac{1}{2} (1 + \sigma_n \sigma_p), \quad (3.10)$$

где σ_n и σ_p — матрицы Паули, определяющие спин нейтрона и протона.

*) В этом можно убедиться следующим образом. Пользуясь соотношением (2.6)

$$(\sigma_n \sigma_p)^2 = 3 - 2\sigma_n \sigma_p,$$

получаем:

$$Q^2 = \frac{1}{4} \{1 + 2\sigma_n \sigma_p + (\sigma_n \sigma_p)^2\} = 1.$$

Таким образом собственные значения Q равны ± 1 .

Легко видеть, что триплетному состоянию отвечает собственное значение, равное +1, а синглетному —1. Действительно, среднее арифметическое собственных значений $\sigma_n \sigma_p$ равно нулю,

поэтому среднее арифметическое собственных значений Q равно $\frac{1}{2}$.

Так как существуют три волновые функции переменных $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, относящиеся к триплетному, и только одна, относящаяся к синглетному состоянию, то сопоставление собственных значений Q должно быть именно таким, как сказано выше.

Пользуясь оператором Q , перепишем оператор энергии взаимодействия между нейтроном и протоном в виде

$$V = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} \left(a_1 \frac{1+Q}{2} + a_0 \frac{1-Q}{2} \right) \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) = \\ = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_p] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \quad (3.11)$$

Оператор энергии взаимодействия нейтрона с молекулой водорода может быть представлен в виде

$$U = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_1] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \\ - \frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_2] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2), \quad (3.12')$$

где индексы 1 и 2 относятся к обоим протонам.

Удобно выделить в этом выражении симметричную и антисимметричную части по отношению к спинам протонов; именно, мы представим U в виде

$$U = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S] [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)] - \\ - \frac{\pi\hbar^2}{2M} (a_1 - a_0) \sigma_n (\sigma_1 - \sigma_2) [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)], \quad (3.12)$$

где матрица

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

представляет собой полный спин молекулы.

Ясно, что симметричная часть оператора U ответственна за такие переходы, при которых спиновая симметрия молекулы не изменяется, иными словами, эта часть оператора обуславливает переходы ортоводорода в ортоводород и параводорода в параводород.

Антисимметричная часть вызывает переходы ортоводорода в параводород и обратно.

Рассмотрим столкновение нейтрона, импульс которого равен $\mathbf{p}_0$, с молекулой водорода, обладающей импульсом $-\mathbf{p}_0$ и характеризующейся квантовыми числами v (вибрационное число), J (ротационное число) и S (результатирующий спин *).

*) В основу положена система координат, в которой центр инерции нейтрона и молекулы совпадают.

Определим вероятность того, что нейтрон в результате столкновения приобретёт импульс $\mathbf{p}$, а молекула перейдёт в состояние, характеризующееся квантовыми числами $-\mathbf{p}$, v' , J' , S' .

Волновая функция начального состояния нейтрона и молекулы имеет вид

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_n} \chi_m \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \Phi_{v,J,m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S,m_S}, \quad (3.13)$$

где $\Omega^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_n}$ — волновая функция нейтрона с импульсом $\mathbf{p}_0$, нормированная на объём Ω ; χ_m — спиновая функция нейтрона (m — проекция спина нейтрона на ось z); $\Omega^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}}$ — волновая функция, описывающая движение центра тяжести молекулы, импульс которой равен $-\mathbf{p}_0$; $\Phi_{v,J,m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ — волновая функция, описывающая относительное движение протонов в состоянии с вибрационным квантовым числом v , ротационным числом J и магнитным квантовым числом m_J ; наконец, χ_{S,m_S} — спиновая функция протонов в состоянии с результирующим спином S (проекция спина на ось z равна m_S).

Аналогичным образом волновая функция конечного состояния ψ_f может быть записана в виде

$$\psi_f = \Omega^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_n} \chi_{m'} \Omega^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \Phi_{v',J',m_{J'}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S',m_{S'}}.$$

Вероятность перехода, отнесённая к единице времени, определяется по известной формуле

$$\frac{2\pi}{\hbar} |(\psi_f, U \psi_i)|^2 \rho_E, \quad (3.14)$$

где ρ_E — число конечных состояний в единичном интервале энергии. Энергия в конечном состоянии равняется:

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J,v},$$

где $E_{J,v}$ — внутренняя энергия молекулы в состоянии с квантовыми числами J, v . Согласно закону сохране-

ния энергии,

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J,v} = \frac{3}{4M} p_0^2 + E_{J,v}. \quad (3.15)$$

Плотность конечных состояний равна:

$$\rho_E = \frac{\Omega p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE} d\Omega = \Omega \frac{Mp}{12\pi^2\hbar^3} d\Omega$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла вектора p).

Выражение (3.14) следует ещё просуммировать по всем значениям m' , m_J , m_S и усреднить по значениям m , m_J , m_S .

Разделив полученное таким образом выражение для вероятности на поток нейтронов (относительно молекулы водорода), равный $\frac{3}{2} \frac{p_0}{M\Omega}$, мы найдём дифференциальное сечение рассеяния нейтрона $d\sigma_{JvS; J'v'S'}$ в телесном угле $d\Omega$, сопровождающегося переходом молекулы из состояния J, v, S в состояние J', v', S' :

$$d\sigma_{J'v'S'; JvS} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} \frac{1}{2(2S+1)(2J+1)} \times \\ \times \sum_{m'm_J'm_S} \sum_{m m_J m_S} \left| \left(\psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \right) \right|^2 d\Omega. \quad (3.16)$$

Рассмотрим сначала переходы, при которых спин молекулы не изменяется. Используя симметричную часть энергии взаимодействия, будем иметь в этом случае:

$$\left(\psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \right) = \\ = -\frac{1}{2\Omega} (m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_0 - p) \left[r_n - \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \right\} \times \\ \times \Phi_{v'J'm_J'}^*(r_1 - r_2) \Phi_{vJm_J}(r_1 - r_2) \times \\ \times [\delta(r_n - r_1) + \delta(r_n - r_2)] d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \\ = -(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v'J'm_J'}(r) \Phi_{vJm_J}(r) dr.$$

Поэтому

$$\sum_{m'm_S'} \sum_{mm_S} \left| \left(\psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \right) \right|^2 = \\ = \left| \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v'J'm_J'}^*(r) \Phi_{vJm_J}(r) dr \right|^2 \times \\ \times \sum_{m'm_S'} \sum_{mm_S} |(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2.$$

Замечая, что оператор $3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S$ является диагональным по отношению к полному спину молекулы, мы представим второй множитель в последней формуле в виде

$$\sum_{m'm_S'} \sum_{mm_S} |(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2 = \\ = \sum_{mm_S} (m S m_S | [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 | m S m_S)$$

(мы использовали матричный закон умножения).

Легко видеть, что

$$(\sigma_n S)^2 = S^2 - \sigma_n S.$$

Действительно,

$$(\sigma_n S)^2 = (\sigma_x S_x + \sigma_y S_y + \sigma_z S_z)^2 = \\ = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + \sigma_x \sigma_y S_x S_y + \sigma_y \sigma_x S_y S_x + \dots$$

Замечая, что

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$$

и

$$S_x S_y - S_y S_x = iS_z,$$

мы и получим указанное соотношение.

Поэтому

$$[3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 = (3a_1 + a_0)^2 + (a_1 - a_0)^2 S^2 + \\ + 2(3a_1 + a_0)(a_1 - a_0) \sigma_n S - (a_1 - a_0)^2 \sigma_n S.$$

Так как сумма диагональных элементов матрицы мо-

мента равна нулю, то

$$\sum_{mm_S} (mm_S | (3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S^2) | mm_S) = \\ = 2(2S+1) [(3a_1 + a_0)^2 + S(S+1)(a_1 - a_0)^2].$$

Собирая наши формулы, мы получим окончательно:

$$d\sigma_{J',v';J,v,S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} [(3a_1 + a_0)^2 + S(S+1)(a_1 - a_0)^2] \times \\ \times \frac{1}{2J+1} \sum_{m_J m_{J'}} \left| \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v',J',m_{J'}}^*(r) \Phi_{v,J,m_J}(r) dr \right|^2 d\Omega. \quad (3.17)$$

Заметим, что в этом выражении J и J' должны быть числами одинаковой чётности, так как функция Φ удовлетворяет условию

$$\Phi_{v,J,m_J}(-r) = (-1)^J \Phi_{v,J,m_J}(r).$$

Изменение знака r соответствует обмену пространственных координат обоих протонов. Пространственная волновая функция должна при этом, согласно принципу Паули, оставаться неизменной в случае противоположно ориентированных спинов протонов, т. е. при $S=0$, и должна менять знак в случае одинаково ориентированных спинов, т. е. при $S=1$.

Иными словами, при $S=0$ (параводород) возможны только чётные значения J , а при $S=1$ (ортоводород) — только нечётные значения J . Эти соотношения могут быть записаны в виде условия

$$(-1)^J = (-1)^S. \quad (3.18)$$

Итак, орто-ортопереходы происходят между состояниями с нечётными значениями ротационного числа J ; пара-парапереходы происходят между состояниями с чётными значениями J .

Рассмотрим теперь переходы, при которых общий спин молекул изменяется, т. е. орто-пара- и пара-орто-переходы. Эти переходы вызываются антисимметричной частью энергии возмущения (3.12).

Вычисления, аналогичные проделанным выше, приводят к следующему выражению для сечения рассеяния с изменением общего спина молекулы:

$$d\sigma_{J',v',1-S;J,v,S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} (3-2S)(a_1 - a_0)^2 \frac{1}{2J+1} \times \\ \times \sum_{m_J, m_{J'}} \left| \int \sin \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v',J',m_{J'}}^*(r) \Phi_{v,J,m_J}(r) dr \right|^2 d\Omega. \quad (3.19)$$

Заметим, что орто-пара- и пара-ортопереходы связаны с изменением чётности ротационного числа J .

Минимальная энергия, которой должен обладать нейтрон (в системе центра инерции) для того, чтобы перевести молекулу из состояния J, v в состояние J', v' , равняется, согласно (3.15),

$$\frac{p_0^2 - p^2}{2M} = \frac{2}{3} (E_{J',v'} - E_{J,v}). \quad (3.15')$$

В лабораторной системе начальный импульс нейтрона равен $\frac{1}{2} p_0$, поэтому минимальная энергия равна:

$$\frac{3}{2} (E_{J',v'} - E_{J,v}).$$

Для малых значений чисел J, v энергия молекулы (выраженная в eV) может быть приближённо найдена по формуле [1]

$$E_{J,v} = 0,015 \frac{1}{2} J(J+1) + 0,533 v.$$

Нейтрон должен обладать энергией в 0,045 eV для того, чтобы перевести молекулу из состояния с квантовыми числами $v=0, J=1$ в состояние $v'=0, J'=2$. Для перехода из состояния $v=0, J=0$ в состояние $v=0, J=1$ требуется энергия 0,023 eV.

Рассмотрим тот случай, когда энергия нейтрона меньше 0,045 eV. В этом случае вибрационное число v не может изменяться; что же касается J , то возможны следующие переходы: $0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$.

Для определения вероятности этих переходов будем рассматривать молекулу H_2 как твёрдый ротатор. В этом

приближении волновая функция молекулы может быть представлена в виде [18]

$$\Phi_{0,J,m_J}(r) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|m_J|)!}{(J+|m_J|)!}} \sin^{|m_J|} \vartheta \left(\frac{d}{d \cos \vartheta} \right)^{J+|m_J|} \times \\ \times \frac{(\cos^2 \vartheta - 1)^J}{2^J J!} e^{im_J \varphi} [\rho(r - r_e)]^{1/2} \frac{1}{r_e}, \quad (3.20)$$

где ϑ и φ — полярный и азимутальный углы, определяющие положение вектора r , и r_e — расстояние между обоими протонами молекулы в состоянии равновесия ($r_e \approx 0,75 \cdot 10^{-8}$ см).

Матричный элемент, определяющий упругое рассеяние ($0 \rightarrow 0$), равен:

$$\int \cos \frac{p_0 - p}{2\hbar} r \cos \vartheta |\Phi_{0,0,0}(r)|^2 2\pi r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \frac{\sin \frac{p_0 - p}{2\hbar} r_e}{\frac{p_0 - p}{2\hbar}} = \frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}}$$

(θ — угол рассеяния в системе центра инерции).

Дифференциальное сечение упругого рассеяния согласно (3.17) равно

$$d\sigma_{0,0,0;0,0,0} = \\ = \frac{4}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left[\frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}} \right]^2 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Интегральное сечение имеет вид

$$\sigma_{0,0,0;0,0,0} = \frac{32\pi}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \\ = \frac{16}{\pi} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e} \right)^2 \left\{ \ln \frac{2p_0 r_e}{\hbar} - Ci \frac{2p_0 r_e}{\hbar} + 0,5772 \right\}, \quad (3.21)$$

где

$$Ci x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Аналогичным образом могут быть определены сечения для переходов $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$ ($v=0$) [15]:

$$\sigma_{1,0,1;0,0,0} = 32\pi (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e} \right)^2 \times \\ \times \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Ci x \right] \Big|_{(p_0 - p) r_e / \hbar}^{(p_0 + p) r_e / \hbar}, \quad (3.22)$$

$$\left(p = \sqrt{p_0^2 - \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right)$$

$$\sigma_{0,0,0;1,0,1} = \frac{32\pi}{3} (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e} \right)^2 \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Ci x \right] \Big|_{(p - p_0) r_e / \hbar}^{(p + p_0) r_e / \hbar}, \quad (3.23)$$

$$\left(p = \sqrt{p_0^2 + \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right),$$

$$\sigma_{1,0,1;1,0,1} = \frac{16\pi}{3} \left\{ (3a_1 + a_0)^2 + \right. \\ \left. + 2(a_1 - a_0)^2 \frac{1}{\xi^2} \left[-\frac{3}{\xi^2} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right)^2 + \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln 2\xi - Ci 2\xi - 0,4228 \right] \right\} \quad (3.24)$$

где $\xi = \frac{p_0 r_e}{\hbar}$.

Вычисления приводят к следующим результатам. Если энергия нейтрона равна 20°K , то [19]

$$\sigma_{000;000} = 6,444 (3a_1 + a_0)^2, \\ \sigma_{101;101} = 6,450 [(3a_1 + a_0)^2 + 2(a_1 - a_0)^2], \\ \sigma_{000;101} = 1,753 (a_1 - a_0)^2.$$

Экспериментально могут быть найдены величины [20]

$$\sigma_{\text{пара}} = \sigma_{0,0,0;0,0,0}, \\ \sigma_{\text{орто}} = \sigma_{1,0,1;1,0,1} + \sigma_{0,0,0;1,0,1}.$$

При энергии нейтронов $0,000867 \text{ eV}$

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \quad \sigma_{\text{орто}} = 145 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

При энергии нейтронов $\sim 0,0024 \text{ eV}$

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 3,58 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \\ \sigma_{\text{орто}} \approx 116 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Сечение упругого рассеяния в параводороде содержит комбинацию $(3a_1 + a_0)^2$, в $\sigma_{\text{орто}}$ помимо этой величины входит ещё $(a_1 - a_0)^2$. Из опытов по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде можно, следовательно, определить величины $|3a_1 + a_0|$ и $|a_1 - a_0|$, т. е. определить абсолютные значения a_0 и a_1 и $\text{sgn} \frac{a_1}{a_0}$.

Величины a_1 и a_0 оказываются противоположных знаков. Так как $\alpha_1 > 0$, то согласно (3.8) $a_1 < 0$. Поэтому $a_0 > 0$, т. е. $\alpha_0 < 0^*$). Амплитуды рассеяния равны [20]

$$\begin{aligned} a_1 &\approx -0,52 \cdot 10^{-12} \text{ см}, \\ a_0 &\approx 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ см}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\alpha_1 > 0, \alpha_0 < 0. \quad (3.25)$$

Так как $\alpha_0 < 0$, то это означает, что только триплетное состояние является связанным. Мы видим, что не существует состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона.

Заметим, что сечение рассеяния нейтрона свободными протонами можно представить в виде

$$\sigma_0 = \pi (3a_1^2 + a_0^2) = \frac{\pi}{4} [(3a_1 + a_0)^2 + 3(a_1 - a_0)^2]. \quad (3.26)$$

*) Приведём некоторые данные [15], показывающие, как влияет выбор значения a_0 на величину сечений различных процессов рассеяния и возбуждения молекулы H_2 . Считая $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см, можно показать, что значение сечения упругого рассеяния нейтронов в параводороде при отрицательном a_0 примерно в 244 раза меньше значения при $a_0 > 0$. Различие между обоими случаями столь велико, что изучение одного только упругого рассеяния в параводороде приводит к заключению, что $a_0 < 0$.

Если $a_0 < 0$, то сечение рассеяния обычных тепловых нейтронов (с энергией $E \approx 0,037$ эВ) в параводороде будет примерно в 100 раз больше сечения рассеяния нейтронов, находящихся при температуре жидкого воздуха ($E \approx 0,01$ эВ). При $a_0 > 0$ это отношение составляет только $3/4$.

Если $a_0 < 0$, то сечение рассеяния нейтронов в ортоводороде при температуре жидкого воздуха будет в 300 раз больше сечения рассеяния тех же нейтронов в параводороде. При $a_0 > 0$ это отношение составляет только $7/5$.

Это соотношение показывает, что σ_0 , так же как и $\sigma_{\text{пара}}$ и $\sigma_{\text{орто}}$, выражается через величины $3a_1 + a_0$ и $a_1 - a_0$; иными словами, σ_0 можно выразить через $\sigma_{\text{орто}}$ и $\sigma_{\text{пара}}$. Согласно имеющимся данным [21],

$$\sigma_0 = (21 \pm 1) 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Приведённые выше данные для $\sigma_{\text{орто}}$ и $\sigma_{\text{пара}}$ находятся в соответствии с этим значением σ_0 [20].

Опыты по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде могут быть использованы для определения порядка величины радиуса действия ядерных сил r_0 . Последний входит в выражения, связывающие a_1 и a_0 с α_1 и α_0 (см. (3.8)). Следует иметь в виду, что радиус действия сил в триплетном состоянии может отличаться от радиуса действия в синглетном состоянии.

Считая энергию связи дейтрона равной $\approx 2,19 \cdot 10^6$ эВ, мы найдём, согласно (2.2''),

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}} \approx 2,29 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{1}{a_1} = 4,36 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Зная из опытных данных величину a_1 , можно по формуле (3.8) вычислить радиус действия ядерных сил в триплетном состоянии.

Заметим, что сечение рассеяния нейтронов в параводороде очень чувствительно к выбору величины r_0 . На рис. 1 и 2 [19] приведена зависимость сечений $\sigma_{\text{пара}}$ и $\sigma_{\text{орто}}$ от r_0 для трёх значений $\sigma_0 = 20,5; 21; 21,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Энергия нейтронов равна 20° К .

Сопоставление данных по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами и в орто- и параводороде приводит к заключению, что в триплетном состоянии

$$r_0 \approx 1,5 - 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Эта величина меньше обычно принимаемого значения $r_0 \sim 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, которое получается из опытов по рассеянию протонов протонами (см. § 6) и относится к антипараллельной ориентации спинов протонов.

Заметим, что дальнейшие данные о зависимости ядерных сил от спинов частиц могут дать опыты по рассеянию медленных нейтронов в орто- и парадеутерии. Мы не будем, однако, подробно рассматривать здесь этот вопрос*).

§ 4. Рассеяние нейтронов связанными протонами. Формулы (1.6'), (1.7), определяющие рассеяние нейтро-

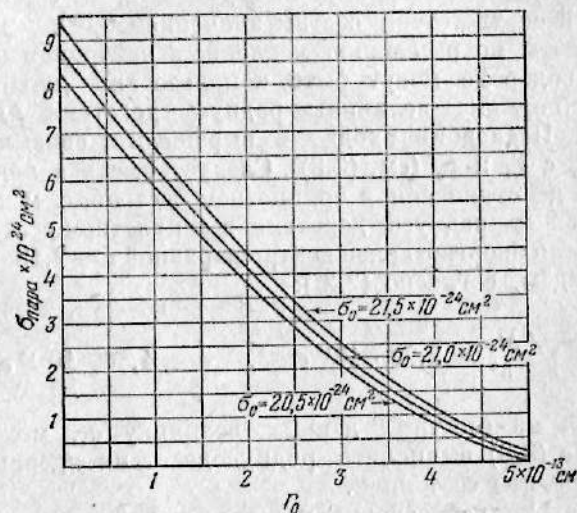


Рис. 1.

нов протонами, выведены в предположении, что протоны являются свободными. При рассмотрении рассеяния нейтронов в веществах, содержащих водород, например в парафине, этими формулами можно пользоваться только в тех случаях, когда энергия нейтрона значительно больше энергии связи протонов, т. е. больше некоторой предельной энергии $\hbar\omega_0$, где ω_0 по порядку величины определяет частоту колебаний протона в молекуле вещества. Для парафина эта энергия составляет около 0,4 eV [24]. При меньших энергиях нейтрона и энергиях такого же

* См. по этому вопросу работу [23].

порядка величины протоны нельзя уже считать свободными.

Легко получить общую формулу для сечения рассеяния нейтронов, учитывающую связь протона в молекуле [24]. Мы будем, так же как и в § 3, пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$-\frac{4\pi\hbar^2}{M}a\delta(r_n - r_p),$$

где r_n и r_p — радиусы-векторы, определяющие положения нейтрона и протона, M — масса нейтрона и a — кон-

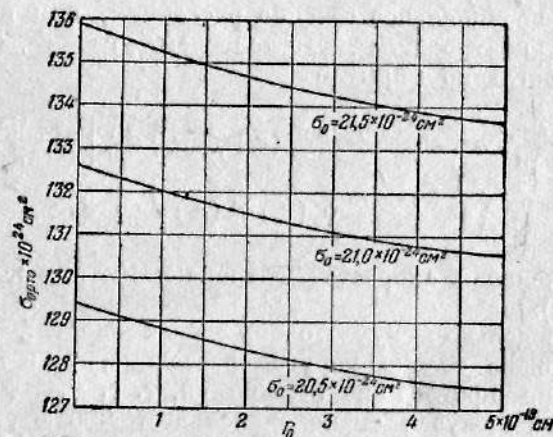


Рис. 2.

станта, связанная с сечением рассеяния нейтронов свободными протонами соотношением

$$\sigma_0 = 4\pi a^2. \quad (4.1)$$

Определим вероятность перехода нейтрона из состояния с импульсом p_0 в состояние с импульсом p .

Волновые функции протона в начальном и конечном состояниях пусть будут $\psi_0(r_p)$ и $\psi_p(r_p)$.

Матричный элемент перехода равняется:

$$M_{p_0, n} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a \int \frac{1}{V\Omega} e^{i p_0 r_n} \psi_0(r_n) \delta(r_n - r_p) \times \\ \times \frac{1}{V\Omega} e^{-i p r_n} \psi_n^*(r_p) dr_n dr_p = \\ = -\frac{4\pi\hbar^2}{M\Omega} a \int e^{i(p_0 - p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n, \quad (4.2)$$

где $\frac{1}{V\Omega} e^{i p r_n}$ — волновая функция нейтрона с импульсом p , нормированная на объём Ω .

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором импульс нейтрона лежит в телесном угле $d\Omega$, определяется согласно формуле

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{4\pi\hbar^2}{M} a \int e^{i(p_0 - p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n \right|^2 \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 dE v_0} = \\ = 4a^2 \frac{v}{v_0} \left| \int e^{i(p_0 - p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n \right|^2 d\Omega \quad (4.3)$$

(v_0 — начальная скорость нейтрона и E — его конечная энергия).

В предельном случае очень малых энергий нейтрона возможно только упругое рассеяние, при котором состояние протона не изменяется, т. е. $\psi_0 \equiv \psi_n$. Замечая в этом случае экспоненциальный множитель единицей и замечая, что $v = v_0$, мы получим из (4.3):

$$d\sigma = 4a^2 d\Omega. \quad (4.4')$$

Полное сечение упругого рассеяния равняется:

$$\sigma = 16\pi a^2. \quad (4.4)$$

Оно в четыре раза превосходит сечение рассеяния нейтронов свободными протонами.

Рассмотрим теперь неупругое рассеяние нейтронов [24].

Мы будем рассматривать протон в молекуле вещества, содержащего водород, как гармонический осциллятор.

В случае молекулы парафина частоты колебаний протона вдоль линии, соединяющей атомы H и C, и перпендикулярно к этой линии равны соответственно $\nu_1 = 3000^{-1}$ см и $\nu_2 = 800 - 900$ см $^{-1}$ [24].

В общем случае волновая функция протона представляет собой произведение трёх волновых функций линейного осциллятора

$$\psi_n(r_p) = \psi_{n_x}(\xi) \psi_{n_y}(\eta) \psi_{n_z}(\zeta),$$

где

$$\psi_m(\xi) = (2\pi)^{-1/4} (m!)^{-1/2} e^{-1/4 \xi^2} H_m(\xi),$$

$$\xi = x \left(\frac{\hbar}{2M\omega_x} \right)^{-1/2}, \quad \eta = y \left(\frac{\hbar}{2M\omega_y} \right)^{-1/2}, \quad \zeta = z \left(\frac{\hbar}{2M\omega_z} \right)^{-1/2}.$$

Здесь x, y, z — координаты протона; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — частоты, отвечающие колебаниям вдоль осей x, y, z , $H_m(\xi)$ — функции Эрмита

$$H_m(\xi) = e^{\frac{1}{2} \xi^2} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \right]_{\xi=0},$$

n_x, n_y, n_z — вибрационные квантовые числа осциллятора.

Матричный элемент, входящий в (4.2), можно представить в виде произведения трёх интегралов типа

$$A_x = (2\pi)^{-1/2} (n_x!)^{-1/2} \left(\frac{d^{n_x}}{d\xi^{n_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \alpha)^2 + i q_x \xi} d\xi \right)_{\alpha=0} = \\ = (i q_x)^{n_x} (n_x!)^{-1/2} e^{-1/2 q_x^2} \quad (4.5)$$

$$\left(q_x = \frac{(p - p_0)_x}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_x}} \right),$$

относящихся к координатам x, y, z .

Сечение рассеяния (4.3) на основании (4.5) приобретает вид

$$d\sigma = 4a^2 \frac{v}{v_0} \frac{q_x^{2n_x} q_y^{2n_y} q_z^{2n_z}}{n_x! n_y! n_z!} e^{-q^2} d\Omega, \quad (4.6)$$

где

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2.$$

Если частоты колебаний вдоль трёх направлений одинаковы и равны ω , то

$$q^2 = \frac{(p-p_0)^2}{2M\hbar\omega} = (E + E_0 - 2\sqrt{EE_0} \cos \vartheta) / \hbar\omega$$

(E_0 — начальная энергия нейтрона, ϑ — угол рассеяния).

В этом случае энергия осциллятора равна $n\hbar\omega$, где $n = n_x + n_y + n_z$. Суммируя (4.6) по всем значениям чисел n_x, n_y, n_z , сумма которых равна n , мы найдём сечение рассеяния нейтрона, сопровождающегося возбуждением n -го вибрационного состояния протона. Это сечение равно:

$$\begin{aligned} d\sigma_n &= \frac{4a^2}{n!} \sqrt{\frac{E}{E_0}} q^{2n} e^{-q^2} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \frac{q^{2n}}{n!} e^{-q^2} dq^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\sigma_0 = 4\pi a^2, \quad \varepsilon = E_0/\hbar\omega, \quad \varepsilon - n = E/\hbar\omega.$$

Полное сечение возбуждения n -го состояния находится путём интегрирования (4.7) по q в пределах

$$q_{\min} = \varepsilon^{1/2} - (\varepsilon - n)^{1/2}, \quad q_{\max} = \varepsilon^{1/2} + (\varepsilon - n)^{1/2}. \quad (4.7')$$

Оно равно

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \{f_n(q_{\min}^2) - f_n(q_{\max}^2)\}, \quad (4.8)$$

где

$$f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Сечение упругого рассеяния, согласно (4.8), выражается формулой

$$\sigma_{n=0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon}); \quad (4.9)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно равно $4\sigma_0$, что совпадает с полученным выше результатом; при $\varepsilon = 1$ оно равно $0,98\sigma_0$.

Для больших значений ε при любом n , не слишком близком к ε , второе слагаемое в (4.8) очень мало, а первое мало отличается от единицы. Поэтому

$$\sigma_n = \sigma_0/\varepsilon \quad (\varepsilon \gg 1). \quad (4.10)$$

Так как максимальное значение n , согласно (4.7'), равно ε , то полное сечение при больших ε равно σ_0 , причём одинаково вероятно любое значение потери энергии между нулём и начальной энергией нейтрона $\varepsilon\hbar\omega$.

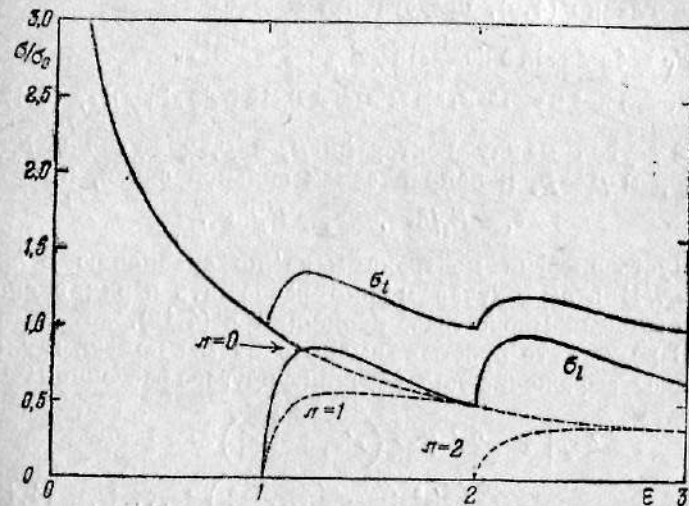


Рис. 3.

Этот результат вполне очевиден, так как при больших ε связь протона несущественна.

На рис. 3, заимствованном из обзора Бете [24], изображена зависимость сечений $\sigma_{n=0}$, σ_1 , σ_2 , а также полного сечения $\sigma_t = \sum_n \sigma_n$ от энергии нейтрона. Здесь же приведён ход сечения для потери энергии. Это сечение определяется согласно формуле

$$\sigma_t = \frac{2}{\varepsilon} \sum_n n \sigma_n \quad (4.11)$$

(множитель $2/\varepsilon$ введён для того, чтобы при больших энергиях ε сечение σ_t равнялось σ_0).

Если частоты колебаний протона вдоль разных направлений неодинаковы, то формулы для сечений сильно

усложняются. Мы определим здесь только сечение упругого рассеяния нейтронов с учётом анизотропии связи протона в молекуле парафина.

Дифференциальное сечение упругого рассеяния можно, согласно (4.6), представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= 4a^2 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \frac{1}{2} \sin \chi d\chi e^{-a_x^2 - a_y^2 - a_z^2} = \\ &= \sigma_a e^{-2(1-\cos \vartheta)(\varepsilon_1 \cos^2 \chi + \varepsilon_2 \sin^2 \chi)} \sin \vartheta d\vartheta \sin \chi d\chi, \quad (4.12) \end{aligned}$$

где ϑ — угол между векторами $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}$, χ — угол между вектором $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ и направлением сильной связи, и

$$\varepsilon_1 = E_0 / \hbar \omega_1, \quad \varepsilon_2 = E_0 / \hbar \omega_2.$$

Пусть энергия нейтрона мала по сравнению с $\hbar \omega_1$ и $\hbar \omega_2$. В этом случае можно разложить в ряд экспоненциальный множитель, входящий в (4.12).

В результате простых вычислений мы получим следующее выражение для сечения упругого рассеяния^[24]:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\sigma_0 \left[1 - 2\varepsilon' + \frac{32}{15} \left(\varepsilon' \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{64}{35} \left(\varepsilon' \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \frac{5}{24} \varepsilon_1^3 \right) + \dots \right], \quad (4.13) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon' = \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_2.$$

В случае тепловых нейтронов, энергия которых равна $kT = 180^\circ \text{K}$, формула (4.13) приводит к результату

$$\sigma = 2,8\sigma_0$$

(мы считаем $\nu_1 = 3000 \text{ см}^{-1}$, $\nu_2 = 800 \text{ см}^{-1}$).

§ 5. Замечания о рассеянии быстрых нейтронов протонами. Рассматривая различные процессы рассеяния медленных нейтронов, мы не делали никаких специальных предположений о характере ядерных сил.

Рассеяние быстрых нейтронов протонами, когда длина волны нейтрона мала по сравнению с радиусом действия ядерных сил, в этом отношении сильно отличается от рассеяния медленных частиц.

Для определения сечения рассеяния быстрых нейтронов протонами необходима детальная теория взаимодействия нейтрона и протона.

Рассеяние быстрых частиц не будет сферически симметричным, причём характер асимметрии будет существенно зависеть от характера ядерных сил.

Заметная асимметрия в рассеянии нейтронов должна наблюдаться при энергиях нейтронов порядка нескольких десятков MeV.

Если бы между нейтроном и протоном действовали обычные силы, то в системе центра инерции большая часть нейтронов рассеивалась бы на малые углы. (Это значит, что в лабораторной системе протоны двигались бы, главным образом, под прямым углом к падающему пучку нейтронов.)

Иные соотношения должны иметь место в случае действия так называемых «обменных» сил. Под «обменными» силами понимают силы взаимодействия между нейтроном и протоном, обусловленные переходом некоторой третьей частицы от нейтрона к протону и обратно. С таким переходом связано превращение нейтрона в протон и протона в нейтрон. Нейтрон и протон рассматриваются при этом как два состояния единой ядерной частицы — нуклона.

Для формального описания обменных сил мы должны считать оператор энергии взаимодействия между нейтроном и протоном отличающимся следующим свойством: действуя на волновую функцию нейтрона и протона, этот оператор приводит к замене координат нейтрона координатами протона и обратно.

Покажем, что если действуют обменные силы, то быстрые нейтроны должны рассеиваться протонами, главным образом, назад. Такая картина будет иметь место в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся нейтрона и протона. В лабораторной системе протоны будут двигаться главным образом в направлении первоначального пучка нейтронов.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при очень больших энергиях нейтрона (больших по сравнению с эффективной величиной потенциальной энергии взаимо-

действия нейтрона с протоном) для определения эффективного сечения рассеяния можно пользоваться приближением Борна [17], которое даёт следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int \psi_f^*(r) J(r) \psi_i(-r) d\tau \right|^2 \sin\theta d\theta.$$

Здесь θ — угол рассеяния, ψ_i и ψ_f — волновые функции нейтрона в начальном и конечном состояниях, $J(r)$ — пространственная часть оператора энергии взаимодействия частиц, M — масса нейтрона.

Под знаком интеграла стоит $\psi_i(-r)$, а не $\psi_i(r)$, ввиду обменного характера сил.

В качестве волновых функций сюда следует подставить плоские волны

$$\psi_i = e^{ikr}, \quad \psi_f = e^{ik'r'},$$

где k и k' — волновые векторы падающего и рассеянного нейтронов. Итак,

$$d\sigma = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int J(r) e^{-i(k+k')r} d\tau \right|^2 \sin\theta d\theta. \quad (5.1)$$

При больших энергиях множитель $e^{-i(k+k')r}$ сильно осциллирует, и поэтому интеграл, входящий в (5.1), очень мал, если только $k+k'$ не близко к нулю.

Таким образом главную роль играют такие углы рассеяния, для которых $k+k'$ близко к нулю, т. е. углы порядка π . Иными словами, рассеянные нейтроны движутся, главным образом, назад, как и утверждалось выше.

Мы могли бы описать это рассеяние, сказав, что падающая частица отклоняется на небольшой угол, но в процессе рассеяния меняется природа частиц, так что нейтрон становится протоном, а протон — нейтроном.

Таким образом, наблюдая асимметрию в рассеянии быстрых нейтронов, можно выяснить характер ядерных сил, т. е. определить, являются ли они обычными или обменными.

Имеющиеся в настоящее время данные по рассеянию нейтронов с энергией ~ 100 MeV приводят к заключению, что ядерные силы по крайней мере частично имеют обменный характер [25].

§ 6. Рассеяние протонов протонами. Эффективный поперечник рассеяния, обусловленного кулоновскими силами отталкивания, определяется, как известно, формулой Рёзерфорда.

В случае рассеяния протонов протонами эта формула с учётом эффекта обмена протонов имеет следующий вид [26]:

$$2\pi\sigma_0(\theta) \sin\theta d\theta = \frac{e^4}{M^2v^4} \left[\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta} - \frac{\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v} \ln \tan^2\theta\right)}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \right] 2\pi \sin 2\theta d(2\theta), \quad (6.1)$$

где θ — угол рассеяния в лабораторной системе координат (2θ — угол рассеяния в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся протонов).

В формуле (6.1) первый член даёт число протонов, рассеянных на угол θ (в лабораторной системе) в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда.

Второй член даёт число протонов отдачи, движущихся под углом θ к первоначальному пучку также в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда. Число этих протонов равняется, очевидно, числу падающих протонов, рассеянных на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$, так как при столкновении двух частиц одинаковой массы они разлетаются под углом, равным $\frac{\pi}{2}$.

Наконец, последний член учитывает квантовомеханический эффект обмена сталкивающихся протонов.

Опыты по рассеянию быстрых протонов протонами [27], [28], [29], [30] (в первую очередь опыты Тюва, Хавстеда и Хейденбурга [28]) показали, что формула Рёзерфорда неправильно описывает рассеяние быстрых протонов протонами.

Расхождение между экспериментальными данными и формулой (6.1) весьма велико. Наблюдаемое на опыте число протонов, рассеянных под углом в 45° при энергии протонов порядка 1 MeV, в несколько раз превосходит число, даваемое формулой (6.1).

Отсюда следует, что между протонами, кроме кулоновских, действуют ещё дополнительные, специфически ядерные силы.

Считая, что эти силы, так же как и в случае взаимодействия нейтрона и протона, характеризуются очень малым радиусом действия, мы можем заключить, что в случае протонов не очень больших энергий особенно сильно будет возмущена действием ядерных сил S -волна в разложении волновой функции сталкивающихся протонов в ряд по функциям, соответствующим различным значениям орбитального момента l [31], [32].

Это разложение волновой функции имеет, как известно, следующий вид:

$$\psi = \sum_l u_l(r) P_l(\cos \theta), \quad (6.2)$$

где $u_l(r)$ — радиальная функция, отвечающая относительному моменту количества движения протонов, равному l , $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра.

Так как протоны подчиняются статистике Ферми-Дирака, то пространственная ψ -функция (6.2) должна быть антисимметричной или симметричной в зависимости от того, параллельны или антипараллельны спины протонов. В первом случае в сумму (6.2) входят только нечётные, а во втором только чётные значения момента.

Отсюда следует, что ядерные силы, возмущающие S -волну, будут сказываться на рассеянии протонов протоном только при антипараллельной ориентации спинов протонов, т. е. в $1/4$ всех случаев столкновений.

Определим асимптотический вид S -волны с учётом действия ядерных сил*).

Напомним предварительно, что асимптотическое поведение волновой функции частицы в кулоновском поле имеет вид

$$\psi = e^{ikz + i\alpha \ln k(r-z)} + \frac{e^2}{r M v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr - i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\eta_0}, \quad (6.3)$$

*) Мы следуем ниже изложению Бете [31].

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar v}, \quad k = \frac{Mv}{\hbar}, \quad e^{i\eta_0} = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{|\Gamma(1+i\alpha)|},$$

r — расстояние между протонами, z — разность их z -координат (ось z совпадает с направлением скорости падающих протонов), θ — угол рассеяния в системе, связанной с центром инерции (он равен 2θ , см. (6.1)).

Первое слагаемое в (6.3) представляет собой падающую волну, возмущённую кулоновским полем, второе — рассеянную волну.

Согласно сказанному выше, нас интересует симметричная волновая функция

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \psi(-x, -y, -z). \quad (6.4)$$

Для получения асимптотического вида последней следует добавить к выражению (6.3) функцию, получающуюся в результате замены в (6.3) z на $-z$ и $\cos \theta$ на $-\cos \theta$ (при этом $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ заменяется на $\cos^2 \frac{\theta}{2}$).

S -волна в симметричной волновой функции двух протонов, взаимодействующих по закону Кулона, имеет следующий вид [18]:

$$u_0 = 2e^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 - \alpha \ln 2kr)/kr \quad (6.5)$$

[множитель 2 возникает из-за двух слагаемых в (6.4)].

Если, кроме кулоновских, действуют ещё специфические ядерные силы, то вместо (6.5) мы будем иметь функцию

$$u = 2Ce^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 + \delta_0 - \alpha \ln 2kr)/kr, \quad (6.6)$$

где δ_0 — дополнительное смещение фазы, вызываемое ядерными силами, а C — константа, которая может быть определена следующим образом.

Наша задача состоит в нахождении рассеянной волны с учётом действия ядерных сил. Для этого достаточно, очевидно, вычесть из выражения (6.3), предварительно симметризованного, функцию u_0 и прибавить функцию u . Таким путём мы заменим в формуле (6.3) S -волну в чисто кулоновском поле S -волной, возмущённой

действием ядерных сил; волны же, отвечающие значениям момента l , отличным от нуля, при этом, как и должно быть, остаются неизменными. Разность $u - u_0$ не может, очевидно, содержать сходящейся волны, т. е. члена e^{-ikr} . Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны выбрать константу C равной $e^{i\delta_0}$.

Итак,

$$u = \frac{1}{kr} \{ e^{-i(kr - \alpha \ln 2kr)} + e^{i(kr + \pi + 2\eta_0 + 2\delta_0 - \alpha \ln 2kr)} \}.$$

Возмущённая действием ядерных сил симметричная волновая функция протонов имеет следующий асимптотический вид:

$$\begin{aligned} \Psi' = & e^{ikz + i\alpha \ln k(r-z)} + e^{-ikz - i\alpha \ln k(r+z)} + \\ & + \frac{1}{r} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr + 2i\eta_0 + i\pi} \left\{ \frac{e^2}{Mv^2} \left(e^{-\frac{i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{i\alpha \ln \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) + \frac{i}{k} (e^{2i\delta_0} - 1) \right\}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Квадрат модуля фигурной скобки представляет собой, как известно, эффективный поперечник рассеяния, относённый к единице телесного угла в системе, связанной с центром инерции протонов. Он равен, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) = & \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left| e^{-\frac{i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{i\alpha \ln \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{2\hbar v}{e^2} (e^{2i\delta_0} - 1) \right|^2. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Полагая здесь $\delta_0 = 0$, мы получим поперечник рассеяния в том случае, если действуют только кулоновские силы, причём протоны имеют антипараллельные спины (если спины протонов параллельны, то второе слагаемое будет входить со знаком минус; выражение (6.1)

представляет собой среднее взвешенное сечение, когда параллельной ориентации спинов приписывается вес $3/4$, и антипараллельной — вес $1/4$.

Пренебрегая членом $\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}$, так как $\alpha \ll 1$, мы получим из (6.8):

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) - \sigma(\theta)_{\delta_0=0} = & \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left[\left(\frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 - \right. \\ & \left. - \frac{8\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \right]^2, \quad (6.8') \\ & \left(\theta = \frac{1}{2} \theta \right). \end{aligned}$$

Для получения дифференциального поперечника рассеяния с учётом действия ядерных сил нужно выражение (6.8'), умноженное на $\frac{1}{4} 2\pi \sin 2\theta d(2\theta)$ (множитель $1/4$ представляет собой вес состояния с антипараллельными спинами), прибавить к (6.1).

Мы получим, таким образом, следующую формулу для эффективного сечения рассеяния протонов в интервале углов $\theta, \theta + d\theta$ с учётом действия ядерных сил:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = & \frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{2\hbar v}{e^2} \frac{\sin \delta_0 \cos \delta_0}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \left(\frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 \right] 2\pi \sin \theta d\theta \quad (6.9) \end{aligned}$$

(E — энергия протонов). Здесь предполагается, что $(e^2/\hbar v) \ln \sin^2 \theta \ll 1$.

Приведём отношение сечений $\sigma(45^\circ)/\sigma_0(45^\circ)$:

$$\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} = \left(\frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \right)^2 - \frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 + 1. \quad (6.9')$$

Заметим, что даже при малой величине угла δ_0 это отношение может быть большим из-за фактора $\left(\frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2$, который равен 160 для протонов с энергией 1 МэВ.

Согласно опытам Тюва и др.^[28], отношение $\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)}$ при энергии протонов ~ 900 keV равно примерно 5. При энергии 700 keV оно составляет 3 и при энергии 600 keV равно примерно 1,4^[32]. При энергии ~ 2400 keV $\sigma(45^\circ)/\sigma_0(45^\circ) \approx 42,9$ ^[29].

Экспериментально найденное угловое распределение рассеянных протонов очень хорошо описывается формулой вида (6.9), если только надлежащим образом выбрать

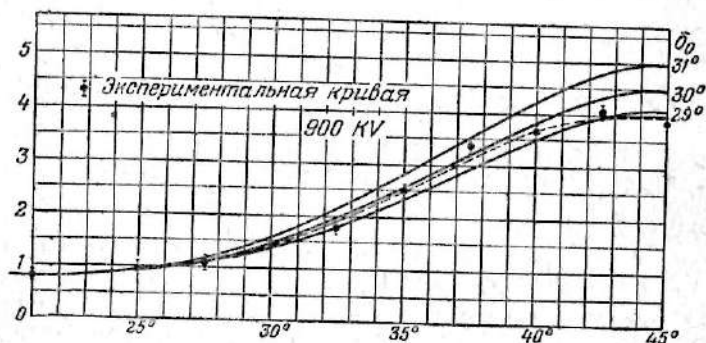


Рис. 4.

в ней фазу δ_0 . Последняя зависит от энергии протонов и должна быть взята равной $\delta_0 \approx 30^\circ$ при энергии протонов ~ 900 ^[32].

При этом получается удовлетворительное согласие между экспериментальными данными и формулой (6.9) (см. рис. 4^[32]), на котором изображено экспериментально наблюдаемое угловое распределение рассеянных протонов и распределение, вычисленное по формуле (6.9) для различных значений фазы δ_0). При энергии ~ 600 keV фаза должна быть взята равной $\delta_0 \approx 21^\circ$ ^[32]. При энергии протонов в 10 MeV фаза δ_0 равна $52^\circ 30'$ ^[33]. В этой области энергий следует учитывать действие ядерных сил не только на S -волну, что мы делали выше, но и на волны, отвечающие значениям орбитального момента l , отличным от нуля; в первую очередь нужно учесть влияние ядерных сил на P -волну (точнее, 3P -волну). Из экспериментальных данных^[30] по рассея-

нию протонов с энергией в 10 MeV следует, что смещение фазы 3P -волны равно $\delta_1 = -0,8^\circ$. Остальные волны можно считать невозмущёнными действием ядерных сил^[33].

Зная знак фазы δ , можно сделать выводы о характере действующих сил. Именно, положительный знак фазы соответствует притяжению, а отрицательный — отталкиванию. В этом можно убедиться из формулы^{[34] *}

$$\delta_n \approx -\frac{\pi M}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) [J_{n+\frac{1}{2}}(kr)]^2 r dr,$$

справедливой при малых δ_n . (Здесь $V(r)$ — потенциальная энергия, $J_{n+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя.)

Таким образом опыты по рассеянию протонов протонами доказывают, что между протонами, кроме обычной силы электростатического отталкивания, на малых расстояниях действуют ещё специфические ядерные силы. В состоянии 1S (спины протонов антипараллельны) протоны притягиваются, в состоянии 3P (спины параллельны) по всей вероятности отталкиваются.

Так как в лёгких ядрах, когда роль кулоновских сил отталкивания незначительна, число протонов равняется примерно числу нейтронов, то следует считать, что между парой нейтронов также действуют ядерные силы, причём по порядку величины они не отличаются от ядерных сил, действующих между парой протонов.

Заметим, что чередование характера сил (притяжение и отталкивание) при переходе от чётных к нечётным значениям момента l является характерной особенностью обменных сил^[35]. Поэтому опыты по рассеянию протонов с энергией в 10 MeV, из которых следует, что $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 < 0$, следует рассматривать как указание на то, что ядерные силы по крайней мере частично имеют обменный характер^[33] (см. § 5).

Если характеризовать взаимодействие двух протонов на малых расстояниях прямоугольной потенциальной

*) См. также замечание в конце этого параграфа.

ямой, то удовлетворительное согласие с экспериментальными данными получится, если считать глубину ямы порядка 11,5 MeV и ширину r_0 порядка $2,8 \cdot 10^{-13}$ см [32].

Для такой ямы можно ввести величину

$$\gamma = - \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right)_{r=r_0}$$

(u/r — волновая функция двух протонов, отвечающая значению $l=0$), аналогичную введенной ранее величине α .

Соотношение, аналогичное (1.4'), имеет в случае двух протонов следующий вид:

$$k \operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = -\gamma. \quad (6.10')$$

Величина γ оказывается отрицательной, что указывает на невозможность связанного состояния для двух протонов.

Определим ещё величину энергии, аналогичную ε' [см. (1.7)]:

$$\varepsilon'' = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{M}.$$

Она оказывается порядка 100 keV, то-есть того же порядка, что и величина ε' . Отсюда можно заключить, что силы между нейтроном и протоном и между двумя протонами в синглетном состоянии имеют одинаковый порядок величины.

Малость ε'' в ядерном масштабе энергий означает, что система протон — протон в синглетном состоянии близка к резонансу (аналогично системе нейтрон — протон в синглетном состоянии). При этом под близостью к резонансу мы понимаем следующее. Если бы существовало связанное состояние у двух протонов, то величина γ была бы положительной. На самом деле γ отрицательна, но очень мала. В ядерном масштабе γ , так же как и α_0 , почти равна нулю, т. е. примыкает к области тех значений γ , которым соответствовал бы связанный уровень. Поэтому уже малое изменение параметров системы привело бы к появлению связанного уровня, близкого к нулю. Такое свойство системы мы и называем резонансом.

§ 7. Захват нейтронов протонами. Нейтрон может быть захвачен протоном с испусканием γ -кванта, уносящего избыток энергии.

В системе координат, связанной с центром инерции нейтрона и протона, энергия γ -кванта равняется

$$\hbar\omega = E + \varepsilon, \quad (7.1)$$

где E — кинетическая энергия частиц, ε — энергия связи дейтрона (энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, равна $E_0 = 2E$).

Радиационный захват нейтрона можно рассматривать как переход системы нейтрон + протон из состояния, относящегося к непрерывному спектру, в состояние с дискретной энергией. Мы определим вероятность такого перехода.

Заметим предварительно, что длина волны γ -излучения, испускаемого при захвате нейтрона, всегда (точнее говоря, вплоть до энергии нейтрона ~ 100 MeV) значительно больше, чем радиус действия ядерных сил; иными словами, эффективные размеры излучающей системы значительно меньше длины волны γ -кванта. Обычно в таких условиях излучение имеет характер электрического дипольного излучения.

При захвате медленных нейтронов, который мы далее будем рассматривать, электрическое дипольное излучение не играет, однако, главной роли, и поэтому оказывается необходимым учитывать магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучение.

В справедливости этого утверждения можно убедиться из следующих соображений. Основным состоянием дейтрона, т. е. конечным состоянием системы нейтрон + протон, является состояние ${}^3S_1 + {}^3D_1$ («примесь» состояния 3D_1 очень невелика, порядка 4%, см. § 2). Для того чтобы перейти в состояние 3S_1 с излучением электрического дипольного γ -кванта, нейтрон должен находиться в состоянии 3P_1 , иными словами, момент количества движения нейтрона относительно протона должен равняться $l=1$. С другой стороны, известно, что эффективный параметр столкновения равен $l\hbar$, где $\hbar$ —

длина волны нейтрона. Поэтому при $l=1$ нейтрон проходит на расстоянии порядка λ от протона. Для медленных нейтронов $\lambda \gg r_0$ (r_0 — радиус действия ядерных сил). Это значит, что нейтрон с моментом $l=1$ проходит настолько далеко от протона, что вероятность его захвата будет крайне малой.

Изложенные соображения не относятся к переходу системы нейтрон—протон из синглетного состояния 1S_0 в триплетное состояние 3S_1 , сопровождающемуся излучением магнитного дипольного γ -кванта. Нейтроны с моментом $l=0$ (S -нейтроны), которые испытывают лобовое столкновение с протонами, могут поглощаться последними, причём излишек энергии будет излучаться в виде магнитного дипольного γ -кванта.

Если считать основным состоянием дейтрона 3S_1 -состояние, то сталкивающиеся нейтрон и протон должны обладать противоположно направленными спинами, т. е. должны относиться к синглетному состоянию 1S_0 .

Благодаря тому, что в действительности к 3S_1 -состоянию «примешано» в небольшом количестве 3D_1 -состояние, возможны также переходы между триплетными состояниями, однако вероятность перехода из триплетного состояния гораздо меньше вероятности перехода $^1S_0 \rightarrow ^3S_1$.

Переход из триплетного состояния, относящегося к непрерывному спектру, в основное состояние дейтрона может происходить также с излучением квадрупольного кванта, так как при квадрупольном излучении допускаются переходы

$$^3S_1 \rightarrow ^3D_1, \quad ^3D_1 \rightarrow ^3S_1, \quad ^3D_1 \rightarrow ^3D_1.$$

Вероятность этих переходов однако мала по сравнению с вероятностью перехода $^1S_0 \rightarrow ^3S_1$, так что основную роль при захвате медленных нейтронов играют переходы из синглетного состояния 1S_0 в триплетное состояние 3S_1 , сопровождающиеся магнитным дипольным излучением [37].

Переходя к определению вероятности радиационного захвата нейтрона протоном, приведём сперва общие фор-

мулы для определения вероятностей излучения различных типов.

Вероятность радиационного перехода системы из состояния i в состояние f , при котором в телесном угле $d\Omega$ излучается квант $\hbar\omega$, определяется следующей формулой [38]:

$$wd\Omega = \frac{e^2}{(Mc)^2} \frac{\omega d\Omega}{2\pi\hbar c} \left| \sum_n \phi_i^\dagger p_e^{(n)} e^{ikr_n} \phi_f d\tau \right|^2, \quad (7.2)$$

где M — масса и e — заряд частицы (в интересующем нас случае M — масса протона), ϕ_i и ϕ_f — волновые функции начального и конечного состояний, $p_e^{(n)}$ — проекция оператора импульса n -й частицы на направление поляризации волны, k — волновой вектор кванта, r_n — радиус-вектор n -частицы.

Предполагая, что длина волны излучения значительно превосходит размеры излучающей системы, мы разложим e^{ikr_n} в ряд, сохранив в нём два первых члена.

Используя операторное соотношение

$$\frac{p}{M} = v = \dot{r},$$

где v — оператор скорости частицы, представим матричный элемент, входящий в (7.2), в виде

$$\begin{aligned} \left(\sum_n (v_n e) e^{ikr_n} \right)_{if} = & \left(\sum_n (v_n e) \right)_{if} + \frac{i}{2} \left(\frac{d}{dt} \sum_n (er_n) (kr_n) \right)_{if} + \\ & + \frac{i}{2} \left(\sum_n [[r_n v_n], k] e \right)_{if} \end{aligned} \quad (7.3)$$

(e — единичный вектор поляризации).

Так как в квантовой механике матричный элемент, отвечающий переходу $i \rightarrow f$, пропорционален

$$e^{\frac{i}{\hbar}(E_i - E_f)t} = e^{i\omega t}$$

(E_n — энергия n -го состояния), то матричные элементы какого-либо оператора $\mathcal{L}$ и его производной по времени $\dot{\mathcal{L}}$ связаны соотношением

$$(\dot{\mathcal{L}})_{if} = i\omega (\mathcal{L})_{if}.$$

Используя это соотношение, перепишем (7.3) в виде

$$\left(\sum_n (v_n e) e^{ikr_n} \right)_{if} = i\omega \left(\sum_n (er_n) \right)_{if} - \frac{\omega}{2} \left(\sum_n (er_n) (kr_n) \right)_{if} + ci [ke] \cdot \left(\sum_n \frac{1}{2c} [r_n v_n] \right)_{if}. \quad (7.3')$$

Матричные элементы, входящие в (7.3'), представляют собой соответственно матричные элементы дипольного момента, квадрупольного момента и магнитного момента системы.

Соответственно этим трём слагаемым мы получим дипольное, квадрупольное и магнитное дипольное излучения.

Можно показать, что полная вероятность излучения (проинтегрированная по элементу телесного угла вылетающего γ -кванта) складывается из вероятностей дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучений, иными словами, интерференционные члены между различными типами излучения в полной вероятности отсутствуют.

Приведём формулы для вероятностей различных типов излучения.

Вероятность дипольного излучения, при котором γ -квант испускается в телесном угле $d\omega$, определяется по формуле

$$w_d d\omega = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left(\sum_n (er_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega. \quad (7.4)$$

Вероятность магнитного дипольного излучения имеет вид

$$w_m d\omega = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left([\mathbf{k} e] \sum_n \frac{1}{2c} [r_n v_n] \right)_{if} \right|^2 d\omega, \quad (7.5)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении волнового вектора.

Наконец, вероятность квадрупольного излучения выражается формулой

$$w_q d\omega = \frac{e^2 \omega^5}{8\pi \hbar c^5} \left| \left(\sum_n (er_n) (\mathbf{k} r_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega. \quad (7.6)$$

В формулу (7.5) входит матричный элемент магнитного момента системы, обусловленного орбитальным движением. Если частицы обладают ещё спиновым магнитным моментом, то последний следует прибавить к сумме

$$\sum_n \frac{e}{2c} [r_n v_n]. \quad (7.5')$$

Таким образом в общем случае выражение (7.5') должно быть заменено суммарным магнитным моментом системы.

Перейдём к определению вероятностей (7.4), (7.5), (7.6)*. Рассмотрим сначала захват, сопровождающийся излучением магнитного дипольного γ -кванта. Обозначая через $\mathbf{M}$ оператор магнитного момента системы нейтрон + протон, выраженный в ядерных магнетонах, перепишем формулу (7.5) для вероятности захвата в виде

$$w_m d\omega = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \omega}{Mc^2} \right)^2 \omega |([\mathbf{k} e] \mathbf{M})_{if}|^2 \frac{d\omega}{8\pi}. \quad (7.7)$$

Оператор $\mathbf{M}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mu_n \boldsymbol{\sigma}_n + \mu_p \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{2} \mathbf{L} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{J} + \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \mathbf{S} + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_p), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где μ_n и μ_p — магнитные моменты нейтрона и протона, выраженные в единицах $e\hbar/2Mc$, $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\sigma}_p$ — спинные матрицы нейтрона и протона, $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{J}$ — соответственно орбитальный, спиновый и полный моменты системы нейтрон + протон.

*) При вычислении вероятностей мы следуем работе [7].

Наиболее существенную роль при захвате медленных нейтронов играют, как мы указывали выше, переходы из синглетного 1S_0 -состояния, относящегося к непрерывному спектру системы нейтрон + протон, в триплетное состояние $^3S_1 + ^3D_1$, представляющее собой основное состояние дейтрона.

Волновая функция исходного 1S_0 состояния имеет вид

$$\psi_i = \frac{u_0(r)}{r} \chi_0^0, \quad (7.9)$$

где $u_0(r)$ — радиальная функция 1S_0 -состояния, а χ_0^0 — спиновая волновая функция этого состояния.

Волновую функцию ψ_i мы предполагаем нормированной таким образом, что плотность падающих частиц равна единице. Чтобы найти u_0 , нужно решить соответствующее уравнение Шредингера. Вне области действия ядерных сил u_0 имеет следующую асимптотическую форму:

$$u_0 = \frac{1}{k} \sin(kr + \delta_0), \quad r > r_0,$$

где δ_0 связано с введённой ранее [см. (1.4)] величиной α_0 соотношением

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}.$$

Волновая функция конечного состояния, т. е. основного состояния дейтрона, может быть записана в виде

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right\} \chi_1^{m'}, \quad (7.10)$$

где u и w — радиальные функции, описывающие S - и D -волны, S_{12} — оператор, определяемый формулой (2.6'), и $\chi_1^{m'}$ — спиновая волновая функция триплетного состояния.

Чтобы вычислить матричный элемент, входящий в формулу для вероятности захвата (7.7), заметим, что спиновая волновая функция начального состояния χ_0^0 антисимметрична, а спиновая функция конечного состояния $\chi_1^{m'}$ симметрична относительно спиновых координат.

нат. Поэтому только третье слагаемое в выражении для оператора магнитного момента, будучи антисимметричным относительно спиновых переменных обеих частиц, имеет отличные от нуля матричные элементы, отвечающие переходам между состояниями с различными значениями полного спина. (Член, содержащий $[\kappa e] J = J_z$, можно не учитывать, так как, выбрав в качестве оси квантования ось z , направленную по $[\kappa e]$, мы приведём оператор J_z к диагональной форме.)
Итак,

$$([\kappa e] M)_{if} = \\ = (\nu_n - \nu_p) (4\pi)^{1/2} \int_0^\infty uu_0 dr [\kappa e] \left(\chi_1^{m'}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \quad (7.11)$$

(выражения вида $(\varphi_1, L\varphi_2)$ обозначают матричные элементы оператора L).

Для определения w_m нужно квадрат модуля матричного элемента (7.11) просуммировать по всем трём состояниям триплетного основного уровня, т. е. по числу m' . Учитывая, что диагональные матричные элементы оператора $\frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p)$ в синглетном состоянии равны нулю, мы представим эту сумму в виде

$$\sum_{m'} \left| [\kappa e] \left(\chi_1^{m'}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 = \\ = \sum_{m'_j, j} \left| [\kappa e] \left(\chi_j^{m'_j}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 = \\ = \left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2} [\kappa e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right) \quad (7.12) \\ (j=0,1; m'_1=m', m'_0=0)$$

(последняя часть равенства написана на основании правила перемножения матриц). Легко видеть, что

$$\left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2} [\kappa e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right) = 1.$$

Действительно, направляя единичный вектор $[\chi e]$ вдоль оси z , получим:

$$\left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2}[\chi e](\sigma_n - \sigma_p)\right)^2 \chi_0^0\right) = \frac{1}{4}[(\sigma_n^2)^2 + (\sigma_p^2)^2 - 2\sigma_n^2 \sigma_p^2]_{00} = 1.$$

Итак,

$$|([\chi e] M)_{if}|^2 = 4\pi (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \quad (7.13')$$

и

$$\omega_m d\omega = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \omega}{Mc^2}\right)^2 \omega (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2 \frac{d\omega}{2}, \quad (7.13)$$

$$\hbar \omega = \varepsilon + E_0/2.$$

Суммируя это выражение по двум направлениям поляризации γ -кванта и интегрируя по телесному углу $d\omega$, получим следующее выражение для полной вероятности захвата нейтрона из синглетного в триплетное состояние:

$$\begin{aligned} w_m^{(0 \rightarrow 1)} = \\ = 4\pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{Mc^2}\right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\hbar} \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где ε — энергия связи нейтрона, E_0 — энергия нейтрона (в лабораторной системе координат).

Определим теперь эффективное сечение захвата из синглетного в триплетное состояние. Для этого нужно разделить w_m на поток нейтронов, равный $\sqrt{\frac{2E_0}{M}}$. Учитывая ещё, что только один из каждых четырёх нейтронов обладает спином, противоположным спину протона, получим следующее выражение для сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon}{2E_0}\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{Mc^2}\right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon} \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}.$$

Мы видим, что поперечник захвата растёт обратно пропорционально скорости нейтрона (см. по этому поводу также § 12). В области малых энергий, когда $E_0 \ll \varepsilon$, выражение (7.15) приобретает вид

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2}\right)^2 \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2. \quad (7.15')$$

Заметим, что угловое распределение вылетающих γ -квантов является сферически симметричным, так как исходное состояние системы 1S_0 не содержит какого-либо выделенного направления, которое могло бы дать анизотропию в угловом распределении.

Выведем теперь формулы для вероятности захвата нейтрона из триплетного состояния. Мы будем снова пользоваться общей формулой (7.7), но в качестве волновой функции исходного состояния возьмём теперь вместо (7.9) функцию

$$\psi_t = \left(\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r}\right) \chi_1^m. \quad (7.16)$$

Для нахождения радиальных функций u_1 и w_1 , описывающих S - и D -волны, необходимо решить уравнение Шредингера для непрерывного спектра системы нейтрон — протон. (Предполагается, что гамильтониан содержит член

$$S_{12} U(r),$$

обеспечивающий связь между S - и D -волнами; функции u_1 и w_1 удовлетворяют уравнениям (2.11), в которых ε заменяется энергией системы).

При определении функций u_1 и w_1 нужно иметь в виду, что волновые функции начального и конечного состояний должны быть ортогональными. Только при

выполнении этого условия имеет смысл понятие перехода из начального состояния i в конечное состояние j *).

Легко показать, что условие ортогональности имеет вид

$$\int_0^{\infty} (u u_1 + w w_1) dr = 0. \quad (7.17)$$

Напомним, наконец, условие нормировки ψ_i : в общей формуле для излучения (7.7) предполагается, что начальная функция нормирована таким образом, что плотность падающих частиц равна единице.

Вне области действия ядерных сил функции u_1 и w_1 имеют следующий асимптотический вид:

$$u_1 = \frac{g_0(kr + \delta_0)}{k} = \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}; \quad (7.18)$$

$$w_1 = \text{const.} \frac{g_2(kr + \delta_2)}{k} = \frac{\text{const.}}{k} \left\{ -\sin(kr + \delta_2) - \frac{3}{kr} \cos(kr + \delta_2) + \frac{3}{(kr)^2} \sin(kr + \delta_2) \right\}, \quad (7.18')$$

где g_0 и g_2 — радиальные функции, входящие в разложение плоской волны в ряд по функциям Лежандра

$$e^{ikr} = \sum_0^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{g_l(kr)}{kr}. \quad (7.19)$$

Функция g_l связана следующим образом с функцией Бесселя $J_{l+1/2}(z)$:

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{l+1/2}(kr). \quad (7.19')$$

Для определения фаз δ_0 и δ_2 мы должны «сшить» волновые функции вне и внутри области действия ядерных сил, т. е. в точке $r=r_0$. Напомним, что,

*) В рассмотренном выше случае перехода из синглетного в триплетное состояние ортогональность автоматически обеспечивается благодаря тому, что функции χ_1^m и $\chi_1^{m'}$ относятся к разным значениям спина и поэтому ортогональны.

согласно (1.4'),

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2} + \text{arccotg} \frac{\alpha_1}{k} - kr_0.$$

Константа, входящая в (7.18'), определяется из условия ортогональности (7.17).

Перейдем к определению матричного элемента магнитного момента. Заметим предварительно, что в триплетном состоянии оператор $S = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_p)$ может быть заменён его проекцией в направлении J , т. е. *)

$$S \rightarrow J \frac{S J}{J^2} = \frac{J}{2} \frac{S^2 + J^2 - L^2}{J^2} = \frac{J}{4} (4 - L^2) \quad (7.20)$$

(мы воспользовались тем, что $J^2 = 2$, $S^2 = 2$).

Далее в, триплетном состоянии все диагональные матричные элементы оператора $\sigma_n - \sigma_p$ обращаются в нуль, поэтому вопрос сводится к определению матричного элемента оператора

$$M_z = J_z \left[\mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) L^2 \right] \quad (7.21)$$

(ось z предполагаем направленной вдоль $[Me]$).

Вычислим матричный элемент $(M_z)_{if}$. Воспользуемся формулами (7.10) и (7.16), определяющими ψ_i и ψ_f , получим:

$$\begin{aligned} (M_z)_{if} = & \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mu_n + \mu_p) \times \\ & \times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \times \\ & \times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z L^2 \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right). \quad (7.22) \end{aligned}$$

Так как в триплетном состоянии

$$S_{12}^2 = 8 - 2S_{12}$$

и среднее значение S_{12} , т. е. интеграл по углам от S_{12} ,

*) См. примечание на стр. 31.

равно нулю *), то $(M_z)_{if}$ приобретает вид

$$(M_z)_{if} = \sqrt{4\pi} (\mu_n + \mu_p) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty (u u_1 + w w_1) dr - \\ - \frac{1}{4\sqrt{4\pi}} (\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2}) \times \\ \times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z L^2 \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right).$$

Первый интеграл, согласно (7.17), равен нулю.

Замечая ещё, что

$$L^2 \left(\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m = 6 \cdot 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \chi_1^m,$$

перепишем $(M_z)_{if}$ в виде

$$(M_z)_{if} = -\frac{3}{2} \sqrt{4\pi} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty w w_1 dr.$$

Квадрат модуля этого выражения следует просуммировать по трём конечным состояниям и усреднить по начальным состояниям.

Используя равенство

$$\frac{1}{3} \sum_m \sum_{m'} |(\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'})|^2 = \frac{1}{3} \sum_m (\chi_1^m, J^2 \chi_1^m) = \frac{2}{3},$$

получим следующее выражение для усреднённого по начальным состояниям и просуммированного по конечным состояниям квадрата модуля $(M_z)_{if}$:

$$\overline{|(M_z)_{if}|^2} = 6\pi \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.23)$$

Подставив это выражение в формулу (7.7), мы найдём вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом из триплетного состояния в основное состояние дейтрона.

*) Согласно (2.6') $S_{12} = 6(Sn)^2 - 2S^2$. Так как среднее значение $(Sn)^2$ равно $\frac{1}{3}S^2$, то среднее значение S_{12} равно нулю.

Проинтегрировав (7.7) по направлениям излучённого γ -кванта и просуммировав результат по двум направлениям поляризации γ -кванта, найдём полную вероятность захвата нейтрона.

В том случае, когда энергия нейтрона значительно меньше энергии связи дейтрона, полная вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом между триплетными состояниями, равна

$$\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)} = 6\pi \frac{e^2}{\hbar c} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \frac{\varepsilon}{\hbar} \left(\int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.24)$$

Для получения сечения захвата нужно разделить это выражение на поток, равный в триплетном состоянии $\frac{4}{3} (2E_0/M)^{1/2}$. Мы получим, таким образом, следующее выражение для сечения захвата [7]:

$$\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)} = \frac{9\pi e^2}{2\hbar c} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \times \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1 \left(\int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.25)$$

Определим ещё вероятность захвата нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением электрического квадрупольного γ -кванта. Вероятность захвата определяется следующей формулой:

$$\frac{e^2 \omega^5}{\hbar c^4} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{4} \mathbf{er} \cdot \mathbf{kr} \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega}{8\pi}, \quad (7.26)$$

где ψ_i и ψ_f определяются соответственно формулами (7.16) и (7.10). (Множитель $1/4$ в матричном элементе происходит из-за того, что только протон имеет заряд; радиус-вектор протона равен $\frac{1}{2} \mathbf{r}$.)

Проделав выкладки, аналогичные приведённым выше, получим следующее выражение для сечения захвата

нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением квадрупольного γ -кванта [1]:

$$\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)} = \frac{\pi}{400} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1^2 \times \\ \times \left| \int_0^\infty r^2 (u w_1 + w u_1 - 2^{-1/2} w w_1) dr \right|^2. \quad (7.27)$$

Сравнение выражений для $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ и $\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}$ показывает, что

$$\frac{\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}}{\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}} \approx \left(\frac{\int_0^\infty w w_1 dr}{\int_0^\infty u u_0 dr} \right)^2 \ll 1.$$

Сечение захвата $\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)}$ также значительно меньше $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$.

Таким образом основную роль играют переходы из синглетного состояния в основное состояние дейтрона, сопровождающиеся магнитным дипольным излучением.

Оценим теперь величину $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$. Не учитывая присутствия в основном состоянии дейтрона D -волны, мы будем считать, что волновая функция основного состояния дейтрона определяется формулой

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}, \quad (7.28)$$

где N — некоторый численный множитель, который равнялся бы единице для бесконечно малого радиуса действия ядерных сил (в этом случае функция (7.28) удов-

летворяет условию нормировки $\int_0^\infty u^2 dr = 1$).

В действительности, волновая функция определяется выражением (7.28) только вне области действия ядерных сил; мы будем, однако, для оценки величины сечения захвата предполагать, что выражение (7.28) справедливо повсюду.

Так как в интеграле, определяющем матричный элемент, область пространства $r < r_0$, в которой действуют ядерные силы, не играет исключительной роли, то можно ожидать, что наш расчёт даст правильный порядок величины $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$.

Множитель N , входящий в выражение (7.28), для волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил, равен $1 + \frac{\alpha_1 r_0}{2}$ для прямоугольной ямы радиуса r_0 , если $\alpha_1 r_0 \ll 1$. Его можно оценить более точно, не делая специальных предположений о форме потенциальной ямы, из анализа данных по рассеянию нейтронов протонами; при этом оказывается, что $N \approx \sqrt{\frac{3}{2}}$ [116].

Так как мы можем определить лишь порядок величины сечения захвата, то в дальнейшем в этом параграфе будем считать, что $N \approx 1$. В качестве волновой функции исходного состояния мы возьмём функцию

$$u_0 = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}. \quad (7.29)$$

В действительности, выражение (7.29) справедливо только вне области действия ядерных сил. Для оценки величины сечения захвата нейтронов мы будем по соображениям, высказанным выше, предполагать, что выражение (7.29) справедливо повсюду.

Полагая

$$C = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{1}{2\pi\hbar},$$

мы пронормируем u_0/r на энергию. Нужная нам нормировка (плотность частиц равна единице) получится, если положить

$$C = 1.$$

(В этом легко убедиться, если вспомнить, что функция, нормированная на энергию, ψ_E , связана с функцией, нормированной на единичный объём $\psi_{2=1}$, соотношением

$$\psi_E = \sqrt{\frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{dE}} \psi_{2=1}.$$

В данном случае $E = \hbar^2 k^2 / M$).

Подставив выражения (7.28), (7.29) в интеграл, входящий в (7.15), получим:

$$\int_0^{\infty} u u_0 dr = \frac{V \sqrt{2x_1}}{k} \int_0^{\infty} \sin(kr + \delta_0) e^{-\alpha_1 r} dr =$$

$$= \frac{V \sqrt{2x_1} k \cos \delta_0 + x_1 \sin \delta_0}{k^2 + x_1^2} = \sqrt{2x_1} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{(x_1^2 + k^2) \sqrt{\alpha_0^2 + k^2}} \quad (7.30)$$

(напомним, что $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}$).

Согласно (7.15') сечение захвата $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ равно:

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_p - \mu_n)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \frac{2x_1^2 (x_1 - x_0)^2}{(x_1^2 + k^2)^2 (\alpha_0^2 + k^2)} \quad (7.31)$$

(E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе отсчёта).

Формула (7.31) показывает, что сечение захвата существенно зависит от знака величины α_0 . Поэтому экспериментальными данными по захвату медленных нейтронов протонами можно воспользоваться наряду с данными по рассеянию медленных нейтронов в орто- и параводороде для определения знака величины α_0 .

Вводя энергию связи $\varepsilon = (\alpha_0 \hbar)^2 / M$ и учитывая, что $\alpha_0 < 0$, перепишем формулу (7.31) в области энергий $E_0 \ll \varepsilon$ в следующем виде [37], [39] *):

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{Mc^2} \frac{\hbar}{Mc} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{E_0}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (\mu_p - \mu_n)^2 \frac{(V\varepsilon - V\varepsilon')^2}{Mc^2} \quad (7.32)$$

где $\varepsilon' = (\alpha_0 \hbar)^2 / M$. (Эта величина составляет около 100 keV.) Для тепловых нейтронов энергией $\approx 0,025$ eV мы получим, согласно (7.32),

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} \approx 0,312 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

*) Учитывая конечность E_0 , следует в (7.32) заменить

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \text{ на } \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon' + \frac{1}{2} E_0}.$$

Если учесть наличие D -волны, то формула (7.15) даст меньшее значение, так как в этом случае

$\int_0^{\infty} u^2 dr < 1$, а именно $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} \approx 0,302 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [7]. Сечения $\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}$ и $\sigma_m^{(2 \rightarrow 1)}$ очень незначительно увеличивают последнюю величину, так что основную роль при захвате нейтронов протонами играют, как уже указывалось выше, переходы из синглетного состояния. Небольшая «примесь» D -волны в основном состоянии дейтрона приводит лишь к некоторому уменьшению сечения $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ по сравнению с тем случаем, если бы основным состоянием дейтрона было состояние 3S_1 .

§ 8. Фоторасщепление дейтрона. При облучении дейтрона γ -квантами, энергия которых превосходит энергию связи дейтрона, может произойти распад дейтрона. Это явление фоторасщепления дейтрона аналогично фотоэффекту в атомах.

Следует различать четыре типа переходов из основного состояния дейтрона в состояния непрерывного спектра: электрический дипольный, магнитный дипольный и электрический квадрупольный переходы в триплетное состояние, а также магнитный дипольный переход в синглетное состояние системы нейтрон + протон. Основную роль, как мы увидим далее, играет электрическое дипольное поглощение γ -квантов.

Мы определим вероятность фоторасщепления дейтрона. Выведем предварительно общие формулы для вероятностей электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного поглощения γ -квантов.

Заметим, что вероятность поглощения γ -кванта связана простым соотношением с вероятностью испускания γ -кванта. Рассмотрим вероятность испускания γ -кванта, которым сопровождается захват частицы (нейтрона). Эта вероятность может быть представлена в виде

$$w_0 = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \rho_\gamma,$$

где M_{12} — матричный элемент перехода и ρ_γ — отнесённое

к единичному интервалу энергии число состояний образующейся в результате реакции частицы, т. е. γ -кванта. Известно, что

$$\rho_{\gamma} = \frac{(\hbar\omega)^2 d\omega_f}{(2\pi\hbar c)^3},$$

где ω — частота γ -кванта, $d\omega_f$ — элемент телесного угла, в котором происходит излучение.

Для получения сечения захвата $d\sigma_c$ нужно разделить ω_c на скорость захватываемых частиц v , поэтому

$$d\sigma_c = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \frac{(\hbar\omega)^2 d\omega_f}{v (2\pi\hbar c)^3}. \quad (8.1)$$

Рассмотрим теперь вероятность поглощения γ -кванта, приводящего к вылету частицы; в рассматриваемом ниже случае речь идёт о расщеплении дейтрона. Эта вероятность может быть представлена в виде

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \rho_n,$$

где M_{21} — матричный элемент перехода, а ρ_n — отнесённое к единичному интервалу энергии число состояний вылетевшей частицы (нейтрона). В интересующем нас случае расщепления дейтрона ρ_n равно:

$$\rho_n = \frac{p^2 dp d\omega_p}{(2\pi\hbar)^3 dE} = \frac{Mp d\omega_p}{2(2\pi\hbar)^3},$$

где $d\omega_p$ — элемент телесного угла, в котором вылетает частица (нейтрон); энергия конечного состояния E связана с импульсом p соотношением $E = \frac{p^2}{M}$ (M — масса нейтрона).

Сечение фоторасщепления $d\sigma_p$ равно частному от деления ω_p на скорость света:

$$d\sigma_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \frac{Mp d\omega_p}{2(2\pi\hbar)^3 c}. \quad (8.2)$$

Так как в рассматриваемых процессах захвата и фоторасщепления начальное и конечное состояния одни и те же, то

$$|M_{12}|^2 = |M_{21}|^2,$$

поэтому отношение сечений равняется:

$$\frac{d\sigma_p}{d\sigma_c} = \frac{Mpc^2 d\omega_p}{2(\hbar\omega)^2 d\omega_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{pc}{\hbar\omega} \right)^2 \frac{d\omega_p}{d\omega_f}. \quad (8.3)$$

Выше мы имели [см. (7.4)] следующую формулу для сечения испускания электрического дипольного γ -кванта при захвате частицы со скоростью v :

$$d\sigma_d = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi\hbar c^3 v} \left| \left(\sum_n (er_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega_f. \quad (8.4)$$

Согласно (8.3), сечение поглощения электрического дипольного γ -кванта равняется:

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp\omega}{\hbar^2} \left| \left(\sum_n (er_n) \right)_{if} \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}. \quad (8.4')$$

Пользуясь этой формулой, запишем сечение фоторасщепления дейтрона в виде

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp}{\hbar^2} \omega \frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}, \quad (8.5)$$

где $e \frac{er}{2}$ — проекция дипольного момента дейтрона на направление поляризации γ -кванта; ψ_i и ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний системы нейтрон + протон. (В формуле (8.5) производится суммирование по конечным состояниям и усреднение по начальным состояниям триплетных уровней, между которыми происходит переход.)

Чтобы получить формулу для сечения поглощения магнитного дипольного γ -кванта, при котором система переходит из триплетного в синглетное состояние (переходы: $^3S_1 \rightarrow ^1S_0$, $^3D_1 \rightarrow ^1D_2$), достаточно в формуле (8.5) заменить проекцию электрического дипольного момента в направлении поляризации γ -кванта на проекцию магнитного момента в направлении магнитного поля γ -кванта, т. е. — заменить $\frac{e}{2} \cdot er$ на $\frac{e\hbar}{2Mc} [\mathbf{k}e] \mathbf{M}$ (обозначения смотри в § 7).

Таким образом мы получим следующую формулу для сечения поглощения магнитного дипольного γ -кванта:

$$d\sigma_p^{(m)} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{p\omega}{Mc^2} \frac{1}{3} \sum_{m'} |(\psi_f, [\mathbf{r}e] M \psi_i)|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi} \quad (8.6)$$

(множитель $1/4$ происходит из-за того, что конечное состояние является здесь синглетным).

Сечение для квадрупольного электрического поглощения может быть легко получено на основании формул (7.6), (8.3).

Определим вероятность фоторасщепления дейтрона, вызываемого поглощением электрического дипольного γ -кванта*). Найдём матричный элемент

$$\left(\psi_f, \frac{1}{2} e \mathbf{r} \psi_i \right).$$

В качестве волновой функции исходного состояния мы возьмём функцию

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{u}{r} + 2^{-1/2} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m, \quad (8.7)$$

представляющую собой волновую функцию основного состояния дейтрона.

Конечным состоянием системы нейтрон—протон является, очевидно, состояние 3P , так как при электрическом дипольном переходе мультиплетность не меняется, а квантовое число l изменяется на единицу.

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона и протона, образующихся в результате расщепления дейтрона, значительно больше радиуса действия ядерных сил.

Если выполнено это условие, то в P -состоянии между нейтроном и протоном практически силы не действуют. Поэтому волновая функция конечного состояния совпадает с волновой функцией свободного движения.

Мы могли бы в качестве волновой функции конечного состояния ψ_f взять плоскую волну $e^{ikr} \chi_1^m$, где k —

*) При вычислении вероятностей фоторасщепления мы следуем работе [7].

волновой вектор нейтрона, величина которого определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{\hbar^2 k^2}{M} = \hbar\omega - \epsilon \quad (8.8)$$

(функция e^{ikr} удовлетворяет нужному условию нормировки, а именно—единичной плотности частиц).

Легко видеть, что только одно слагаемое в разложении e^{ikr} в ряд по полиномам Лежандра [см. формулу (7.19)], отвечающее $l=1$ (P -волна), даёт отличный от нуля результат при подстановке в интеграл

$$\left(\psi_f, \frac{1}{2} e \mathbf{r} \psi_i \right).$$

Поэтому в качестве волновой функции конечного состояния мы возьмём это слагаемое, описывающее P -состояние в случае свободного движения.

Итак,

$$\psi_f = 3i \frac{k r}{kr} \frac{g_1(kr)}{kr} \chi_1^{m'}, \quad (8.9)$$

где

$$g_1(kr) = \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr$$

(вместо $P_1(\cos \vartheta)$ мы написали здесь $\frac{kr}{kr}$, ϑ — угол между k и r).

Подставим (8.9) и (8.7) в выражение для матричного элемента $\left(\psi_f, \frac{1}{2} e \mathbf{r} \psi_i \right)$ и выполним сперва интегрирование по углам в пространстве r .

Замечая, что среднее значение (при интегрировании по углам) от $(na)(nb)$, где $n = \frac{r}{r}$ и a, b — постоянные векторы, равно

$$\overline{(na)(nb)} = \frac{1}{3} ab,$$

а среднее значение $(na)(nb)(nc)(nd)$, где a, b, c, d — постоянные векторы, равно [40]:

$$\overline{(na)(nb)(nc)(nd)} = \frac{1}{15} (ab \cdot cd + ac \cdot bd + ad \cdot bc),$$

получим:

$$\begin{aligned} \left(\psi_f, \frac{1}{2} e r \psi_i \right) &= -i \frac{V \pi}{k^2} \left(\chi_1^{m'} \left\{ e k \int_0^\infty r g_1 u dr + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2}{5} \frac{V \sqrt{2}}{5} \left(\frac{3}{4} k S \cdot e S + \frac{3}{4} e S \cdot k S - e k \right) \int_0^\infty r g_1 w dr \right\} \chi_1^m \right), \quad (8.10) \end{aligned}$$

где

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Мы должны теперь вычислить $\frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{2} e r \psi_i \right) \right|^2$.

Легко видеть, что эта величина может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{2} e r \psi_i \right) \right|^2 &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{k^4} \text{Spur} \left\{ (e k)^2 \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{8}{25} \left(\frac{3}{4} k S \cdot e S + \frac{3}{4} e S \cdot k S - e k \right)^2 \left(\int_0^\infty r g_1 w dr \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\text{Spur } k S \cdot e S = 2 e k,$$

$$\frac{1}{4} \text{Spur } (k S \cdot e S + e S \cdot k S)^2 = \frac{3}{2} (e k)^2 + \frac{1}{2} k^2,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{2} e r \psi_i \right) \right|^2 &= \frac{\pi}{k^2} \left\{ \cos^2 \theta \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{25} (3 + \cos^2 \theta) \left(\int_0^\infty r g_1 w dr \right)^2 \right\}, \quad (8.14) \end{aligned}$$

где θ — угол между $\underline{e}$ и $\underline{k}$.

Так как мы имеем дело с неполяризованными γ -лучами, то $\cos^2 \theta$ следует усреднить по направлению вектора поляризации $\underline{e}$, перпендикулярного к вектору $\underline{x}$. В результате такого усреднения мы получим:

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол между направлением распространения γ -луча и направлением вылета продуктов распада дейтрона.

Окончательное выражение для дифференциального сечения фоторасщепления дейтрона, вызванного поглощением электрического дипольного γ -кванта, имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_p^{(d)} &= \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{M \omega}{\hbar k} \left\{ \sin^2 \vartheta \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{25} (6 + \sin^2 \vartheta) \left(\int_0^\infty r g_1 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\omega_p}{4\pi}. \quad (8.12) \end{aligned}$$

Заметим, что благодаря присутствию в основном состоянии дейтрона D -волны угловое распределение вылетающих частиц, наряду с членом, пропорциональным $\sin^2 \vartheta$, содержит сферически симметричный член.

Интегральное сечение фотоэлектрического расщепления дейтрона равняется [7]:

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M \omega}{\hbar k} \left\{ \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 + \frac{2}{5} \left(\int_0^\infty r g_1 w dr \right)^2 \right\}. \quad (8.13)$$

Для оценки величины $\sigma_p^{(d)}$ мы пренебрежём вторым слагаемым, содержащим ψ -функцию D -волны, и воспользуемся для u выражением (7.28), справедливым вне области действия ядерных сил

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}.$$

Так как в интегралы в формуле (8.13) входит множителем r , то область $r < r_0$, в которой действуют ядерные силы, не оказывает большого влияния на величину интеграла, который определяется в основном

областью вне действия ядерных сил. Поэтому, используя при вычислении $\sigma_p^{(d)}$ формулу (7.28) для волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил, имеет смысл пользоваться точным значением множителя N . В отличие от этого вычисления при вычислении сечения захвата внутренняя область $r < r_0$ играет заметную роль. Пользуясь формулой (7.28) для волновой функции, мы можем получить лишь оценку сечения захвата, поэтому мы считали в § 7 множитель N равным единице.

Поставив в (8.13) выражение (7.28), мы получим следующий результат:

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{8\pi}{3} N^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{\epsilon} E^{3/2}}{(E + \epsilon)^2}, \quad N^2 \approx \frac{3}{2}. \quad (8.14)$$

Сечение при малых энергиях вылетающих частиц пропорционально $E^{3/2}$.

Вводя отношение энергии γ -кванта к энергии связи дейтрона ϵ

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{\epsilon} = \frac{E + \epsilon}{\epsilon},$$

перепишем (8.14) в виде

$$\sigma_p^{(d)} = 4\pi \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^{3/2}}{\gamma^3} \approx 1,78 \cdot 10^{-28} (\gamma - 1)^{3/2} \gamma^{-3} \text{ см}^2. \quad (8.14')$$

Сечение обращается в нуль при $\gamma = 1$ и достигает максимума при $\gamma = 2$, т. е. в том случае, когда кинетическая энергия продуктов расщепления E равна энергии связи дейтрона. Этот максимум равен:

$$(\sigma_p^{(d)})_{\max} \approx 21,6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (8.14'')$$

Выражения (8.14), (8.14') определяют эффективное сечение фоторасщепления дейтрона, связанного с переходом в триплетное P -состояние непрерывного спектра.

Мы рассмотрим теперь фоторасщепление дейтрона, вызываемое магнитным дипольным поглощением γ -кван-

тов. При этом происходят переходы в синглетное состояние непрерывного спектра $^3S_1 \rightarrow ^1S_0$, $^3D_1 \rightarrow ^1D_2$.

Волновая функция конечного состояния может быть представлена в виде

$$\psi_l = \left\{ e^{-i\delta_0} \frac{u_0(r)}{kr} - \frac{5}{2} \left[3 \left(\frac{kr}{r} \right)^2 - 1 \right] \frac{g_2(kr)}{kr} \right\} \chi_0^0. \quad (8.15)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой возмущенную взаимодействием нейтрона и протона 1S_0 -волну непрерывного спектра; выше мы видели, что на больших расстояниях u_0 ведёт себя, как

$$u_0 \approx \sin(kr + \delta_0).$$

Второе слагаемое в (8.15) представляет собой D -волну в разложении e^{ikr} в ряд по полиномам Лежандра [см. (7.19)]; множитель $e^{-i\delta_0}$ перед u_0/kr введён для того, чтобы функция ψ_l на бесконечности вела себя, как сумма первого слагаемого, отвечающего $l=0$ (S -волна), в разложении плоской волны e^{ikr} и сходящейся шаровой волны [7].

Подставляя выражения (8.7) и (8.15) в формулу (8.6), получим следующее выражение для эффективного сечения расщепления дейтрона, вызываемого поглощением магнитного дипольного γ -кванта [7]:

$$\begin{aligned} d\sigma_p^{(m)} = & \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \cdot \frac{\hbar\omega}{Mc^2\hbar} \left\{ \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right)^2 - \right. \\ & - \frac{\cos \delta_0}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right) \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right) (3 \cos^2 \delta - 1) + \\ & \left. + \frac{1}{4} (5 - 3 \cos^2 \delta) \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\sigma_p}{4\pi} \quad (8.16) \end{aligned}$$

(в этом выражении уже произведено усреднение по направлениям поляризации γ -кванта).

Интегральное сечение имеет вид

$$\sigma_p^{(m)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \frac{\hbar \omega}{Mc^2} \frac{1}{k} \times \\ \times \left\{ \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2 + \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right)^2 \right\}. \quad (8.17)$$

Отметим, что при фотомагнитном расщеплении угловое распределение вылетающих продуктов расщепления является в основном сферически симметричным; небольшая асимметрия вызывается, как видно из формулы (8.16), присутствием в основном состоянии дейтрона D -волны.

Если пренебречь в формуле (8.17) вторым слагаемым, содержащим ψ -функцию D -волны, и воспользоваться для u и u_0 соответственно выражениями (7.28), (7.29), то мы получим следующий результат [41]:

$$\sigma_p^{(m)} = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{Mc^2} (\mu_n - \mu_p)^2 \frac{V\bar{E} V\bar{\varepsilon} (V\bar{\varepsilon} + V\bar{\varepsilon}')^2}{(E + \varepsilon)(E + \varepsilon')}. \quad (8.18)$$

Отметим, что при малых энергиях $\sigma_p^{(m)}$ пропорционально $1/\bar{E}$, в то время как $\sigma_p^{(d)} \approx E^{3/2}$; таким образом при малых E магнитное дипольное поглощение является более существенным, чем электрическое дипольное. Оба типа расщепления играют одинаковую роль при энергии $E_0 \approx 3 \cdot 10^5$ eV. Если энергия продуктов расщепления меньше E_0 , то преобладает магнитное дипольное поглощение.

ГЛАВА II

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

§ 9. Составное ядро. В предыдущей главе мы рассмотрели свойства дейтрона—простейшей ядерной системы, состоящей из двух частиц. Мы видели, что для описания многих процессов, происходящих в системе нейтрон—протон в области малых энергий, не требуется детальная теория ядерных сил.

Оказывается, что возможно описать ряд свойств ядерных реакций, происходящих с тяжёлыми ядрами при сравнительно небольших энергиях, также без детальной теории ядерных сил. Это связано с возможностью применения при изучении свойств тяжёлых ядер, содержащих большое число сильно взаимодействующих частиц, методов статистической физики *).

Для того чтобы выяснить особенности протекания ядерных реакций, сравним между собой атомные и ядерные столкновения.

В том хорошо изученном случае, когда энергия взаимодействия падающей частицы (скажем электрона) с отдельными электронами атома мала по сравнению с энергией самой частицы, передача энергии от частицы атомному электрону представляет собой довольно редкое явление. Наиболее вероятным будет прохождение частиц через атом без потери энергии или, иначе говоря, упругое рассеяние частиц.

*) Рассматриваемым ниже вопросам посвящены работы Н. Бора [42], [43], Л. Ландау [48], Я. Френкеля [41], а также ряд работ других авторов [44], [45], [49]. Мы излагаем далее основные результаты этих работ.

С малой величиной взаимодействия связана малая величина ускорения падающей частицы. Отсюда видно, что время, в течение которого частица находится в области атома, по порядку величины равно частному от деления длины порядка размеров атома на скорость частицы.

Так как и ускорение и это время невелики, то процессы излучения при атомных столкновениях в общем мало вероятны.

Иные соотношения имеют место при ядерных столкновениях, происходящих с участием частиц, энергия которых значительно меньше энергии связи атомных ядер.

Наиболее существенным является то обстоятельство, что взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром очень велико. Энергия этого взаимодействия того же порядка величины, что и энергия взаимодействия между отдельными частицами, образующими ядро.

Благодаря наличию в атоме тяжёлого ядра мы можем считать, что при атомных столкновениях падающая частица движется в некотором поле атома, т. е. рассматривать столкновение как задачу одного тела. В ядре все частицы равноправны, поэтому, в отличие от атомного столкновения, ядерное столкновение является существенно задачей многих тел.

Сильное взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром приводит к тому, что очень скоро после соприкосновения с ядром падающая частица теряет значительную часть своей энергии, которая передаётся другим частицам, составляющим исходное ядро.

Это распределение энергии, сосредоточенной вначале на падающей частице, между всеми имеющимися частицами таково, что ни одна из них, вообще говоря, не будет обладать достаточной энергией, чтобы сразу покинуть образовавшуюся систему — исходное ядро плюс падающая частица. Только по прошествии длительного времени, когда благодаря флуктуации какая-либо частица приобретёт достаточную энергию, чтобы преодолеть силы притяжения, действующие на неё со стороны остальных частиц, она сможет покинуть ядро.

Мы приходим, следовательно, к весьма важному выводу: сталкивающуюся частицу и ядро можно рас-

сматривать как единую квантовомеханическую систему, которая существует, не распадаясь, в течение длительного времени, если измерять последнее в характерной ядерной шкале. Это значит, что время жизни системы значительно больше того времени, в течение которого сталкивающаяся с ядром частица может пройти расстояние порядка размеров ядра, не задерживаясь в последнем. Если считать скорость частицы порядка $4 \cdot 10^9$ см/сек и размеры ядра порядка $12 \cdot 10^{-13}$ см, то «характерное ядерное время» τ будет порядка $3 \cdot 10^{-22}$ сек.

В течение времени существования рассматриваемой системы свойства её не отличаются от свойств обычных ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях. Поэтому принято называть систему ядро + падающая частица составным ядром (компаунд-ядром).

Следует подчеркнуть, что составное ядро находится в состоянии с положительной энергией; иными словами, энергия этой системы превосходит энергию, необходимую для отрыва от составного ядра, по крайней мере, некоторых из частиц, входящих в его состав.

Выше мы говорили, что только по прошествии длительного времени энергия возбуждения составного ядра может случайно сосредоточиться на какой-либо частице, которая сможет поэтому покинуть составное ядро. При этом совсем не обязательно, чтобы вылетевшая из составного ядра частица была того же сорта, что и первоначальная частица, приведшая к образованию этого ядра. Напротив, вообще говоря, мало вероятно, чтобы природа обеих частиц была одинаковой, так как имеется много возможностей распада составного ядра. Ещё менее вероятно, чтобы при одинаковой природе налетающей и вылетающей частиц внутреннее состояние ядра не менялось; более вероятно, что оставшееся после вылета частицы ядро будет находиться в возбуждённом состоянии.

Если вылетающая частица того же сорта, что и падающая, и внутренние состояния начального ядра и ядра, остающегося после распада составного ядра, совпадают, то мы имеем дело с упругим рассеянием частиц. Можно сказать, что упругое рассеяние представляет собой сравнительно редкое событие при ядерных столкновениях, так

как распад составного ядра может происходить, вообще говоря, различными способами, при которых вылетающая частица отличается по своей природе от падающей частицы, а остающееся ядро находится в возбужденном состоянии. Следует, однако, отметить, что могут представиться случаи, когда упругое рассеяние будет наиболее вероятным (см. § 19).

Если падающая и вылетающая частицы одной природы, но исходное и образующееся ядра обладают различной энергией, то говорят о неупругом рассеянии частиц. Если частицы отличаются по своей природе, то говорят о ядерном превращении. При ядерных столкновениях оба типа процессов играют существенную роль.

Заметим, что при ядерных столкновениях процессы излучения иногда играют существенную роль. Это связано с тем, что для вылета γ -кванта требуется меньшая концентрация энергии, чем для вылета других частиц; γ -квант может унести с собой меньше энергии, чем вылетающая из ядра частица. Поэтому при малых энергиях возбуждения время жизни составного ядра определяется, главным образом, взаимодействием ядерных частиц с излучением, хотя это взаимодействие и невелико (в силу малости постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$ и малости отношения v/c , где v — скорость ядерных частиц, а c — скорость света) [42], [43]. Отсюда следует, что время жизни составного ядра с небольшой энергией возбуждения (которая лишь несколько превышает энергию связи нейтрона в ядре) очень велико по сравнению с характерным ядерным временем.

Усилению роли процессов излучения при ядерных столкновениях по сравнению с атомными столкновениями содействует также и то обстоятельство, что время, которое проводит налетающая частица в ядре, относительно велико, в силу чего происходит «запутывание» частицы в ядре.

Итак, ядерные столкновения характеризуются сравнительно малым упругим рассеянием; существенную роль играют процессы ядерных превращений и неупругого рассеяния, а также процессы излучения.

Изложенные выше особенности ядерных столкновений были впервые разъяснены Н. Бором [42], [43], который показал, что в ядерном столкновении следует различать две стадии: образование квазистационарного, долго живущего составного ядра и распад последнего. Иными словами, ядерное столкновение происходит согласно схеме: начальное ядро + падающая частица $\rightarrow$ составное ядро $\rightarrow$ остающееся ядро + вылетающая частица.

Поскольку связь между частицами в составном ядре чрезвычайно сильна, вторая стадия (распад составного ядра) должна рассматриваться как отдельное событие, не зависящее от первой стадии — образования составного ядра, т. е. «запутывания» падающей частицы в ядерном веществе. Конечный результат ядерного столкновения определяется соревнованием между различными возможными процессами распада составного ядра, совместимыми с общими законами сохранения.

Для того чтобы понятие составного ядра как квазистационарной системы имело смысл, необходимо, очевидно, предполагать достаточно большим общее число частиц, между которыми распределяется энергия, вначале связанная с падающей частицей.

Что касается энергии падающей частицы, то она не должна быть слишком большой, так как в области больших энергий ядро становится «прозрачным» для частицы. Понятием составного ядра можно пользоваться, если длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра. Для легких ядер это соответствует энергиям падающей частицы, меньшим, примерно, 30—40 MeV [44], для тяжелых ядер — энергиям, меньшим ~ 200 MeV.

Ниже мы будем рассматривать случай достаточно малых энергий падающей частицы, когда законно пользоваться понятием составного ядра.

Подобно обычным стабильным ядрам, составное ядро характеризуется спектром своих энергетических уровней. Так как составное ядро представляет собой только квазистационарную, а не стабильную систему, то эти уровни обладают некоторой шириной. Ширина уровня связана

со временем жизни системы, находящейся на этом уровне. Согласно принципу неопределённости, ширина уровня γ по порядку величины равна частному от деления квантовой постоянной $\hbar$ на время жизни τ :

$$\gamma \approx \frac{\hbar}{\tau}. \quad (9.1)$$

Вероятность w перехода системы в единицу времени из состояния, соответствующего рассматриваемому уровню, в любое другое возможное состояние равна:

$$w = \frac{1}{\tau}. \quad (9.2)$$

Если распад составного ядра, находящегося в некотором состоянии, может происходить различными путями, то w можно представить в виде

$$w = \sum_i w_i, \quad (9.3)$$

где w_i — вероятность распада i -го типа. Соответственно этому можно говорить о частичной ширине γ_i рассматриваемого уровня, отвечающей распаду i -го типа, понимая под γ_i вероятность w_i , умноженную на $\hbar$. Очевидно, полная ширина уровня равна сумме его частичных ширин:

$$\gamma = \sum_i \gamma_i. \quad (9.4)$$

Можно, например, говорить о нейтронной ширине γ_n , радиационной ширине γ_r , ширинах γ_α , γ_p по отношению к вылету α -частицы и протона и т. д., понимая под этими величинами вероятности вылета из составного ядра нейтрона, γ -кванта, α -частицы, протона и т. д., измеренные в энергетической шкале.

Так как время жизни составного ядра велико, если измерять его в характерных ядерных единицах, то ширины уровней составного ядра оказываются малыми по сравнению с ядерными энергиями связи. Отсюда, однако, не следует, что ширины уровней обязательно малы по сравнению с расстояниями между соседними уровнями. Принципиально возможны два случая: когда ширины уровней малы по сравнению с расстояниями

между соседними уровнями и когда ширины того же порядка, что и расстояния между уровнями или даже больше их.

Первый случай осуществляется в области энергий возбуждения составных ядер, которые возникают при облучении ядра медленными частицами (например, медленными нейтронами). Второй случай имеет место для уровней составных ядер, возникающих при бомбардировке ядер быстрыми частицами. В этом случае, как мы увидим далее, обычно расстояние между соседними уровнями меньше их ширины.

Только в первом случае можно говорить об отдельных дискретных уровнях; во втором случае мы имеем дело по существу с непрерывным спектром. Очень важной особенностью первого случая является резко выраженная зависимость вероятности или эффективного сечения образования составного ядра от энергии падающей частицы. Эта зависимость имеет резонансный характер: при некоторых значениях энергии падающей частицы вероятность образования составного ядра, а следовательно, и сечение для какого-либо процесса ядерного расщепления становятся особенно большими. Резонансные явления такого вида действительно наблюдаются, например, при взаимодействии медленных нейтронов с ядрами.

Во втором случае (перекрывающиеся уровни) не существует резко выраженной зависимости сечения расщепления от энергии. Величина сечения в этом случае обусловлена действием большого количества уровней. Наблюдаемое сечение представляет собой результат усреднения сечения, связанного с каждым уровнем, по большому числу уровней.

Заметим, что изучение этого случая упрощается благодаря тому, что при больших возбуждениях, особенно тяжёлых ядер, когда практически мы имеем дело с непрерывным энергетическим спектром, можно пользоваться статистическими методами. К рассмотрению этого случая мы теперь и перейдём.

§ 10. Статистические свойства тяжёлых ядер. В предыдущем параграфе было показано, что существенной чертой ядерных столкновений является образование

квазистационарного составного ядра. Рассмотрим теперь, каковы особенности распределения энергии возбуждения между частицами, образующими составное ядро. Мы говорили уже, что ядерные частицы очень сильно взаимодействуют друг с другом. По этой причине весьма мало вероятно, чтобы энергия возбуждения была сосредоточена на одной частице. Тесная связь между частицами не позволяет рассматривать движение одной частицы как движение, происходящее в некотором консервативном поле, создаваемом другими частицами. Состояния ядра нельзя классифицировать по числу возбуждённых частиц.

Если бы возбуждение ядра сводилось к возбуждению одной частицы, то система ядерных уровней была бы подобна системе атомных уровней, которая характеризуется небольшим числом далеко отстоящих друг от друга уровней.

В ядре имеет место квантованное коллективное движение всех частиц. Если число частиц, входящих в состав ядра, достаточно велико, то энергия возбуждения ядра может быть распределена между частицами весьма большим числом способов. Соответственно большому числу способов распределения энергии между частицами мы имеем большое число энергетических уровней ядра, расстояния между которыми тем меньше, чем больше энергия возбуждения ядра.

Для достаточно тяжёлых ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях, распределение ядерных энергетических уровней становится практически непрерывным. Следует, однако, подчеркнуть, что даже в этом случае время жизни составного ядра в сотни тысяч раз превосходит характерное ядерное время, равное по порядку величины 10^{-22} сек. Мы будем считать, что энергия возбуждения ядра значительно меньше энергии, необходимой для разделения всех его частиц*). Это обстоятельство даёт возможность проводить аналогию между ядром

*) Это условие не выполняется в случае лёгких ядер, облучаемых частицами, получаемыми на самых мощных ускорителях (с энергиями $> 10^8$ eV).

и обычными макроскопическими телами — жидкими и твёрдыми.

Тепловое движение в макроскопических телах имеет много общего с движением частиц в возбуждённом ядре. При этом следует, очевидно, сравнивать внутреннее состояние ядра с состоянием материи при очень низких температурах, так как энергия возбуждения ядра в рассматриваемых условиях значительно меньше его энергии связи. Заметим, что хотя обычные тела при очень низких температурах находятся в кристаллическом состоянии, ядерному веществу нельзя приписывать кристаллическую, т. е. некоторую упорядоченную структуру^[43].

В самом деле, рассмотрим отклонения атомов от их положений равновесия, вызванные так называемыми нулевыми колебаниями. Амплитуда этих колебаний равна по порядку величины

$$\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2},$$

где m — масса атома, ω — частота колебаний. В твёрдых телах величина этого отклонения значительно меньше расстояния между соседними атомами. Для ядер можно пользоваться той же формулой, понимая под m массу ядерной частицы. Хотя в этом случае величина частоты значительно больше, чем частота колебаний атома в кристалле, однако плотность ядерного вещества столь велика, что расстояния между ядерными частицами будут того же порядка величины, что и амплитуда нулевых колебаний. По этой причине ядерное вещество не становится кристаллическим.

Мы можем сравнивать внутреннее состояние ядра скорее с жидким, чем с твёрдым состоянием. Имея в виду эту аналогию, рассмотрим, главным образом с иллюстративной целью, объёмные и поверхностные колебания макроскопических тел, которые происходят под действием упругих сил и сил поверхностного натяжения.

Частоты наименьших объёмных и поверхностных колебаний равны по порядку величины соответственно:

$$\omega_s \sim s^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/2}, \quad \omega_s \sim \alpha^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/2},$$

где ρ — плотность вещества, V — объём тела, ε — коэффициент «упругости» и α — коэффициент поверхностного натяжения*).

Применяя эти формулы к ядру, мы положим:

$$\rho = m\delta^{-3}, \quad V = N\delta^3, \quad \varepsilon = C_\varepsilon K\delta^{-3}, \quad \alpha = C_\alpha K\delta^{-2},$$

где m — масса ядерной частицы, δ^3 — объём, приходящийся на одну частицу, N — общее число частиц в ядре, K — средняя кинетическая энергия частицы в ядре, равная по порядку величины

$$K \sim \frac{\hbar^2}{2m\delta^2} \approx 10-15 \text{ MeV},$$

и C_ε и C_α — безразмерные множители. Можно думать, что они приблизительно постоянны для всех ядер, кроме самых лёгких [43]. Поэтому мы в дальнейшем не будем их выписывать. Умножив ω_ε и ω_α на $\hbar$, мы получим разности энергии между последовательными состояниями ядра. Эти разности для объёмных и поверхностных колебаний равны соответственно:

$$\Delta_\varepsilon E \sim KN^{-1/3}, \quad \Delta_\alpha E \sim KN^{-1/2}. \quad (10.1)$$

*) Частота объёмных колебаний может быть представлена в виде

$$\omega_\varepsilon = s\hbar,$$

где k — волновой вектор и s — скорость распространения колебаний, равная по порядку величины $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$. Подставляя сюда вместо k по порядку величины $V^{-1/3}$ (V — объём тела), мы и получим первую из приведённых в тексте формул.

Для получения второй формулы следует иметь в виду, что частоты поверхностных колебаний пропорциональны $k^{3/2}$ [46]:

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} k^{3/2}.$$

Подставляя сюда вместо k по порядку величины $V^{-1/3}$, мы получим:

$$\omega_\alpha \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} V^{-1/2}.$$

Мы видим, что с ростом N разности энергий убывают, как это и утверждалось выше. Достаточно тяжёлое ядро можно рассматривать как систему с большим числом степеней свободы, могущих возбуждаться множеством различных способов. В этих условиях целесообразно пользоваться при изучении свойств ядер методом статистической физики, что было сделано впервые Л. Ландау и Я. Френкелем. К рассмотрению этого метода мы теперь и перейдём*).

Введём в рассмотрение температуру ядра T (мы будем её измерять в энергетических единицах), а также другие термодинамические функции: энтропию ядра S , энергию возбуждения U и свободную энергию F .

Энергетический спектр ядра будем считать непрерывным. Обозначим через $\rho(U) dU$ число уровней ядра с энергией возбуждения между U и $U + dU$, причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

Свободная энергия F определяется, как известно, из следующего соотношения:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}, \quad (10.2)$$

где суммирование производится по всем уровням ядра.

Переходя к непрерывному спектру, будем иметь:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE. \quad (10.2')$$

Свяжем температуру ядра T с энергией его возбуждения U . Последняя определяется формулой

$$U = \frac{\sum_k E_k e^{-\frac{E_k}{T}}}{\sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}} = \frac{\int E \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}{\int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}. \quad (10.3)$$

*) Ниже мы следуем изложению Бете [44], § 53.

Это соотношение даёт возможность найти U как функцию T , если энергетический спектр ядра известен.

Сравнивая (10.2') и (10.3), получим хорошо известное из статистики соотношение

$$U = \frac{d \frac{F}{T}}{d \frac{1}{T}} = F - T \frac{dF}{dT} = F + TS,$$

где S — энтропия ядра; $S = -\frac{dF}{dT}$.

В интегралах (10.2'), (10.3) главную роль играют значения энергии E_k , близкие к U . Мы положим поэтому:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \rho(U) e^{-\frac{U}{T}} \lambda(U), \quad (10.4)$$

где $\lambda(U)$ — некоторая функция U , которую можно считать медленно меняющейся по сравнению с функциями $e^{-F/T}$, $\rho(U)$, $e^{-U/T}$. Из (10.4) следует, что

$$\rho(U) = e^{\frac{U-F}{T}} \frac{1}{\lambda(U)} = e^S \frac{1}{\lambda(U)}. \quad (10.5)$$

Найдём $\lambda(U)$. Подставим для этого в (10.2') вместо $\rho(E)$ выражение (10.5). Мы получим при этом:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int e^{S(E) - \frac{E}{T}} \frac{dE}{\lambda(E)}, \quad (10.6)$$

где $S(E)$ — энтропия, отвечающая энергии E . В интеграле (10.6) главную роль играют значения E , близкие к U ; так как $\lambda(E)$ представляет собой медленно изменяющуюся функцию, то мы вынесем значение λ в точке $E=U$ за знак интеграла.

В результате получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{F}{T} + S(E) - \frac{E}{T}} dE = \int e^{S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T}} dE.$$

Преобразуем показатель в подинтегральной функции:

$$S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T} = \frac{dS}{dU} (E-U) + \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2 + \frac{U-E}{T}.$$

Замечая, что

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T},$$

получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2} dE.$$

Величина $\frac{d^2S}{dU^2}$ отрицательна, так как U — монотонно возрастающая функция T . Расширив пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$, найдём:

$$\lambda(U) = \sqrt{2\pi} \left| \frac{d^2S}{dU^2} \right|^{-1/2} = \sqrt{2\pi} T \left(\frac{dT}{dU} \right)^{1/2}, \quad (10.7)$$

и следовательно,

$$\rho(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dU} \right)^{1/2} e^S(U). \quad (10.8)$$

Считая для простоты уровни невырожденными, найдём отсюда среднее расстояние между уровнями ядра с энергией возбуждения U . Обозначая его через $D(U)$, получим:

$$D(U) = T \sqrt{2\pi \frac{dT}{dU}} e^{-S(U)}. \quad (10.8')$$

Для того чтобы оценить величину $D(U)$, необходимо сделать какие-либо упрощающие предположения, дающие возможность установить связь между энтропией и энергией возбуждения ядра или, что по сути то же самое, между энергией U и температурой T .

Будем считать энергию и температуру ядра, находящегося в основном состоянии, равными нулю. Так как энергия возбуждения ядра мала по сравнению с его общей энергией связи, то мы имеем дело, как уже упоминалось выше, с низкими ядерными температурами.

Энергия возбуждения обычных макроскопических тел при низких температурах выражается формулой вида

$$U = BT^n, \quad (10.9)$$

где B и n — константы.

Так для твёрдых тел показатель $n=4$, для вырожденного фермиевского газа (например, электронного «газа» в металле) $n=2$. Для жидкой капли, совершающей поверхностные колебания, $n=7/3$ [44].

Можно предполагать, что формулой такого же вида определяется в случае низких ядерных температур и энергии возбуждения ядра. Следует, однако, иметь в виду, что ни один из указанных выше примеров не может быть целиком использован в качестве макроскопической модели сильно возбуждённого ядра, так как в этих примерах полностью не воспроизводятся условия, которые в действительности осуществляются в ядре.

В самом деле, если исходить из газовой модели ядра, то при этом не учитывается взаимодействие между частицами. Модель жидкой капли учитывает в некотором смысле взаимодействие между ядерными частицами. Однако нет оснований считать, что свойства ядерного вещества при низких температурах, когда существенны квантовые эффекты, могут удовлетворительно описываться моделью жидкой капли.

Можно также заметить, что проводимая в этой модели аналогия между ядром и невязкой жидкостью не может считаться правильной ввиду тесной связи между отдельными частицами. Что касается модели твёрдого тела — кристалла, то, как уже было отмечено ранее, ею также пользоваться нельзя.

Вопрос о характере возбуждения ядра связан с большими трудностями, которые происходят как от нашего незнания специфических ядерных сил, так и от сложности решения соответствующей квантовомеханической задачи, если бы даже силы были нам известны.

Формула для энергии типа (10.9) в применении к ядру разъясняет тем не менее основные особенности совокупности ядерных уровней при высоких возбуждениях ядра, в частности, показывает, как возрастает плотность ядерных уровней с увеличением энергии возбуждения. Конечно, при этом не может быть и речи о точном определении $D(U)$, так как формула (10.8') очень чувствительна к значению энтропии $S(U)$, зависящей от параметров B и n . Поскольку определить точно эти константы невозможно,

мы можем лишь грубо оценить величины T , D , ρ в зависимости от энергии возбуждения ядра.

Заметим, что для очень тяжёлых ядер, пренебрегая поверхностными эффектами, можно считать константу B , так же как и в случае макроскопических тел, пропорциональной массе, т. е. числу частиц, входящих в состав ядра. Это предположение даёт возможность определить зависимость плотности уровней от атомного веса.

Для реальных ядер сделанное предположение является очень грубым, так как по диаметру наиболее тяжёлых ядер укладывается приблизительно всего 7 частиц и, следовательно, поверхностные эффекты даже для самых тяжёлых ядер всё ещё играют существенную роль.

Считая $U = BT^n$, мы получим для энтропии выражение

$$S = B \frac{n}{n-1} T^{n-1} = \frac{n}{n-1} (BU^{n-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (10.8'), найдём:

$$D(U) = (2\pi n)^{1/2} \left(\frac{U^{n-1}}{B} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(- \frac{n}{n-1} B^{\frac{1}{n}} U^{\frac{n-1}{n}} \right). \quad (10.8'')$$

Заметим, что согласно теореме Нернста, при $T=0$ энтропия должна обращаться в нуль и, следовательно, должно выполняться условие $n > 1$.

Приведём в заключение этого параграфа в качестве иллюстрации значения T и D в зависимости от U для различных ядер, вычисленные для модели жидкой капли, в которой учитываются поверхностные и объёмные колебания [44] (см. таблицу на стр. 106).

Приведённые данные показывают, что с увеличением энергии возбуждения и увеличением числа частиц уменьшается расстояние между уровнями.

Для тяжёлых ядер ($A > 100$) при энергии возбуждения $U \sim 10$ MeV температура ядра составляет около 1 MeV. Сравнивая эту температуру с кинетической энергией ядерной частицы $K = \hbar^2/2m\delta^2 \approx 10$ MeV, мы видим, что

Атомный вес $A =$	20	50	100	200
Температура в MeV для				
$U = 5$ MeV	1,43	1,11	0,92	0,75
$U = 10$ MeV	1,82	1,41	1,17	0,97
$U = 20$ MeV	2,31	1,81	1,49	1,24
Расстояние между уровнями в eV для				
$U = 5$ MeV	36 000	5 900	1 100	150
$U = 10$ MeV	2 700	180	16	0,9
$U = 20$ MeV	33	0,55	0,015	$1,5 \cdot 10^{-4}$

$T \sim \frac{1}{10} K$. Таким образом ядро действительно можно считать «холодным», что и предполагалось выше.

§ 11. Связь между шириной уровня и сечением образования составного ядра. В предыдущих параграфах мы говорили, что если энергия возбуждения составного ядра сосредоточивается на какой-либо частице, то последняя покидает составное ядро. Возможны следующие виды превращения составного ядра: эмиссия нейтрона или заряженной частицы (протон, α -частица), испускание γ -кванта и, наконец, деление ядра.

Заметим, что переход из возбуждённого в основное состояние может происходить также в результате β -распада составного ядра. Это явление мы можем, однако, не учитывать, так как время жизни ядра по отношению к β -распаду в большинстве случаев значительно больше времени жизни по отношению к другим видам превращений.

Из перечисленных выше процессов деление происходит только с самыми тяжёлыми ядрами. Что касается эмиссии частиц, то вероятность вылета заряженной частицы из-за барьерных эффектов, вообще говоря, меньше, чем нейтральной. Этот вывод не относится к лёгким ядрам и несправедлив для очень больших возбуждений ядра, когда барьерный фактор не играет роли (см. ниже). Поэтому наиболее важными, конкурирующими друг с другом про-

цессами, определяющими время жизни составного ядра, являются вылет нейтрона и испускание γ -кванта.

Мы знаем, что каждая возможность распада связана с некоторым уширением уровня системы. Поэтому каждому процессу распада можно привести в соответствие так называемую частичную ширину уровня, которая определяется, как вероятность рассматриваемого процесса в единицу времени, умноженная на $\hbar$.

Сделаем несколько предварительных замечаний о частичных ширинах по отношению к вылету нейтрона и эмиссии γ -кванта, которые обычно называют нейтронной и радиационной шириной. Нейтронная ширина γ_n существенно зависит от энергии возбуждения составного ядра. Если последняя меньше энергии связи нейтрона в ядре, то γ_n равна нулю. Ниже мы увидим, что если энергия возбуждения близка к энергии связи нейтрона и несколько больше её, так что кинетическая энергия вылетающего из ядра нейтрона невелика, то γ_n пропорциональна скорости вылетающего нейтрона.

С увеличением энергии возбуждения нейтронная ширина сильно возрастает. Этому содействует прежде всего увеличение скорости нейтрона, но более существенным является то обстоятельство, что при больших энергиях возбуждения составного ядра ядро, остающееся после вылета нейтрона, может само по себе находиться в возбуждённом состоянии. Поэтому число возможностей, связанных с вылетом нейтрона, значительно возрастает, что и приводит к сильному увеличению γ_n .

Радиационная ширина γ_r , вообще говоря, отлична от нуля при всех сколь угодно малых возбуждениях ядра. Для энергий возбуждения, не превосходящих энергию связи нейтрона в ядре, радиационная ширина совпадает с полной шириной уровня, так как нейтронная ширина при этом обращается в нуль. При достаточно больших энергиях возбуждения радиационная ширина значительно меньше нейтронной.

Далее мы оценим γ_r , здесь же заметим, что практически во всех случаях, когда приходится иметь дело с ядрами среднего атомного веса ($A \sim 100$), γ_r не превосходит 0,1 eV и скорее меньше этой величины^[50]. Нейтрон-

ная ширина для таких ядер уже при энергии вылетающих нейтронов порядка 100 keV значительно превосходит радиационную ширину.

Перейдём к выяснению того, каким образом можно связать частичные ширины с другими величинами, характеризующими состояние ядра. Мы воспользуемся для этой цели так называемым принципом детального равновесия, устанавливающим связь между вероятностями прямого и обратного переходов. В данном случае речь идёт об установлении связи между шириной уровня и сечением образования составного ядра [48], [49], [44].

Представим себе большой сосуд объёма Ω , содержащий ядра самых различных сортов. Между ядрами могут происходить ядерные реакции. Мы рассмотрим состояние статистического равновесия, при котором число расщеплений в единицу времени ядер сорта C , происходящих, согласно схеме $C \rightarrow A + a$ (A , a — продукты реакции), равно числу рекомбинаций в единицу времени типа $A + a \rightarrow C$.

Обозначим вероятности процессов расщепления и рекомбинации, отнесённые к единице времени, соответственно через w_{Aa}^C и w_C^{Aa} . Условие равенства между числом расщеплений типа $C \rightarrow A + a$ и числом рекомбинаций типа $A + a \rightarrow C$ можно записать в виде

$$g_C w_{Aa}^C = g_A g_a w_C^{Aa}, \quad (11.1)$$

где g_A — статистический вес состояния, в котором находится ядро A и т. д.

Обозначим через $E_A, E_C, \dots$ значения внутренней энергии ядер $A, C, \dots$, понимая под внутренней энергией разность между полной энергией покоящегося ядра и энергией покоя составляющих его частиц. Пусть далее $p_A, p_C, \dots$ обозначают количества движения ядер $A, C, \dots$. Мы предположим, что количество движения ядра A находится в интервале между p_A и $p_A + dp_A$.

Если E_A относится к дискретному спектру, то под статистическим весом g_A мы должны понимать произведение $2i_A + 1$, (i_A — момент количества движения ядра A в состоянии с энергией E_A) на $\frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}$.

Если E_A относится к непрерывному спектру и внутренняя энергия ядра A лежит в интервале $(E_A, E_A + dE_A)$, то статистический вес g_A равен

$$g_A = \rho(E_A) dE_A \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\rho(E_A) dE_A$ — число уровней ядра A в интервале энергии $(E_A, E_A + dE_A)$, причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

В этом параграфе мы понимаем под C составное ядро, энергия которого лежит в непрерывном спектре, состояние же ядра A считаем дискретным. Под a мы понимаем частицу, покидающую ядро C . Итак,

$$g_C = \rho(E_C) dE_C \frac{\Omega dp_C}{(2\pi\hbar)^3};$$

$$g_A = (2i + 1) \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}; \quad g_a = (2s + 1) \frac{\Omega dp_a}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (11.2)$$

где s — спин частицы a , i — момент количества движения ядра A . В том случае, когда вылетающей частицей является γ -квант, $s = 1$ или 2, в зависимости от того, является ли γ -квант дипольным или квадрупольным.

Подставляя (11.2) в (11.1), получим:

$$w_{Aa}^C \rho(E_C) dE_C dp_C =$$

$$= (2i + 1) (2s + 1) w_C^{Aa} dp_A dp_a \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11.3)$$

Введём в рассмотрение вектор импульса относительного движения частиц A и a , который обозначим через p

$$p = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A} (v_a - v_A) = \frac{M_A p_a - M_a p_A}{M_a + M_A}$$

(здесь M_A, M_a — массы частиц A и a ; v_A и v_a — их скорости).

Легко убедиться в том, что имеет место равенство

$$dp_A dp_a = dp_C dp.$$

(Это равенство означает, что якобиан перехода от переменных p_A, p_a к переменным $p_C = p_A + p_a$ и

$p = M_A p_a - M_a p_A / M_A + M_a$ равен единице.) Воспользовавшись этим равенством, перепишем (11.3) в виде

$$w_{Aa}^C dE_C = (2i+1)(2s+1) \frac{1}{\rho(E_C)} w_C^{Aa} dp \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11.4)$$

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии, в силу которого

$$E_C = E_A + E_a + E,$$

где E_a — энергия связи частицы a , E — энергия относительного движения частиц A и a :

$$E = \frac{p^2}{2M}, \quad M = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A}.$$

Из написанного равенства следует, что $dE_C = dE$. Заменив dp на $4\pi p^2 dp = 4\pi p^2 \frac{dp}{dE} dE_C$, мы получим из (11.4) соотношение

$$\begin{aligned} w_{Aa}^C &= w_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{\rho(E_C)} \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= w_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{(2J+1)} D_J \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где J — момент количества движения составного ядра, а D_J — среднее расстояние между вырожденными уровнями составного ядра, момент количества движения которых равен J . (Мы считаем при этом, что кратность вырождения уровня составного ядра с энергией возбуждения E_C равна $2J+1$.)

Умножив w_{Aa}^C на $\hbar$, мы найдём частичную ширину по отношению к распаду типа $C \rightarrow A + a$, усреднённую по всем уровням составного ядра, энергия которых лежит вблизи $E_C = E_A + E_a + E$. Обозначим эту усреднённую ширину через Γ_{Aa}^C . Введём ещё сечение образования составного ядра в результате столкновения частиц A и a , равное

$$\sigma_C^{Aa} = \frac{w_C^{Aa}}{v/\Omega},$$

где v — скорость относительного движения частиц A и a . Формулу (11.5) мы перепишем окончательно в виде

$$\Gamma_{Aa}^C = \frac{(2i+1)(2s+1)}{2J+1} D_J \frac{\sigma_C^{Aa}}{2\pi^2 \lambda^2}, \quad (11.6)$$

где λ — разделённая на 2π длина волны частицы a .

Таким образом, пользуясь статистическими соображениями, можно связать частичную ширину уровня с вероятностью обратного процесса, т. е. с сечением образования составного ядра. При этом следует ещё раз подчеркнуть, что речь идёт о ширине, усреднённой по большому числу уровней, лежащих вблизи энергии возбуждения E_C .

Умножив σ_C^{Aa} на Γ_{Bb}^C/Γ^C , где Γ^C — полная ширина уровня составного ядра, а Γ_{Bb}^C — частичная ширина по отношению к распаду C на ядро B и частицу b , и просуммировав полученное выражение по всем значениям момента составного ядра J , совместимым с законом сохранения момента, найдём усреднённое эффективное сечение для процесса: $A + a \rightarrow B + b$

$$\overline{\sigma_{Bb}^{Aa}} = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{(2i+1)(2s+1)} \sum_J (2J+1) \cdot \frac{\Gamma_{Aa}^C \Gamma_{Bb}^C}{\Gamma^C D_J}. \quad (11.7)$$

(При этом предполагается, что энергия падающей частицы задана.) Заметим, что при заданной энергии падающей частицы сечение образования составного ядра в случае столкновения исходного ядра с нейтроном будет, вообще говоря, больше, чем в случае столкновения с положительно заряженной частицей, если энергия последней меньше высоты потенциального барьера. Поэтому обычно нейтронная ширина больше частичной ширины по отношению к вылету заряженной частицы.

§ 12. Эффективные сечения для упругих и неупругих столкновений. Перейдём к определению сечения образования составного ядра σ_C^{Aa} [50].

Напомним предварительно, что параметр столкновения частиц A и a , т. е. расстояние между первоначаль-

ным направлением движения частицы a и центром ядра A , равен по порядку величины $r_l = l\lambda$, где λ — делённая на 2π длина волны частицы a вдали от ядра, а $l\hbar$ — момент частицы a относительно A .

Отсюда следует, что если a — медленная частица, длина волны которой $\lambda \gg R$ (R — радиус ядра), то составное ядро сможет образоваться только в том случае, когда $l=0$, так как если момент частицы $l \neq 0$, то она проходит на расстоянии от ядра, превышающем R .

Мы рассмотрим сначала случай быстрых падающих частиц, когда $\lambda \ll R$.

Обозначим через σ_l общее эффективное сечение образования составного ядра в результате столкновения ядра A с частицей a , обладающей моментом l , независимо от того, какое значение будет иметь при этом момент количества движения составного ядра.

Если α_{IJ} вероятность того, что образующееся составное ядро будет иметь момент J , то

$$\sigma_c^{Aa} \equiv \sigma_J^{Al} = \alpha_{IJ} \sigma_l. \quad (12.1)$$

Для определения σ_l найдём число частиц a с моментом l , падающих в единицу времени на ядро A . Так как предполагается, что $\lambda \ll R$, то мы можем пользоваться квазиклассическим рассмотрением.

Вдали от ядра частицы с моментом l пронизывают, очевидно, площадь кольца, расположенного перпендикулярно к направлению движения частиц, причём внутренний и внешний радиус кольца равны соответственно $r_l = l\lambda$ и $r_{l+1} = (l+1)\lambda$.

Пусть поток частиц, т. е. число их, падающее в единицу времени на единицу площади, равняется единице. Так как площадь кольца равна $(2l+1)\pi\lambda^2$, то искомое число частиц, падающих на A в единицу времени и обладающих моментом l , равняется $(2l+1)\pi\lambda^2$. Это, очевидно, максимально возможное значение σ_l , отвечающее тому случаю, когда все падающие частицы поглощаются ядром. В действительности, поглощается лишь некоторая их часть, которую мы обозначим через ζ_l .

Итак, сечение образования составного ядра можно представить в виде

$$\sigma_l = (2l+1)\pi\lambda^2\zeta_l, \quad 0 \leq \zeta_l \leq 1. \quad (12.2)$$

Величина ζ_l называется вероятностью прилипания частицы к ядру или иначе вероятностью образования составного ядра [50].

Вероятность прилипания ζ_l зависит от энергии падающей частицы. Мы увидим далее, что в случае быстрых нейтронов, длина волны которых $\lambda \ll R$, $\zeta_l = 1$, если $l \leq \frac{R}{\lambda}$, и $\zeta_l = 0$, если $l > \frac{R}{\lambda}$. Это значит, что нейтрон поглощается ядром с вероятностью, равной единице, если только параметр столкновения $r_l \leq R$.

Для медленных нейтронов (см. § 13) вероятность прилипания ζ_l пропорциональна скорости нейтронов.

Определим теперь α_{IJ} , т. е. вероятность того, что в результате слияния ядра A и частицы a возникнет составное ядро с моментом J .

Будем предполагать, что вероятность прилипания ζ_l не зависит от J . Иными словами, мы считаем, что вероятность появления какого-либо значения J определяется только статистическим весом J , т. е. числом различных возможных ориентаций вектора момента, имеющего значение J . Число этих ориентаций равно $2J+1$.

Поэтому мы полагаем:

$$\alpha_{IJ} = g_{lis,J} \frac{2J+1}{(2s+1)(2l+1)(2i+1)}, \quad (12.3)$$

где $g_{lis,J}$ представляет собой число способов, которыми можно получить данное значение J , складывая векторно l, i, s .

Если хотя бы одно из чисел l, i, s равняется нулю, то $g=1$. Если $s=1/2$, то для максимального и минимального значений J , равных соответственно $l+i+\frac{1}{2}$ и $|l-i|-\frac{1}{2}$, $g=1$; для всех промежуточных значений J $g=2$, так как такие значения J можно

получать двумя способами (если $i=l$, то значение $J=|l-1|-\frac{1}{2}$ не реализуется).

Легко убедиться в том, что определённая указанным образом величина α_{lJ} представляет собой нормированную вероятность, т. е. $\sum_J \alpha_{lJ} = 1$, причём суммирование распространяется на все возможные (совместимые с законом сохранения момента) значения J .

Пользуясь формулами (12.2), (12.3), представим сечение образования составного ядра σ_J^{Al} в виде

$$\sigma_J^{Al} = \pi \lambda^2 g_{lis, J} \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \zeta_l. \quad (12.4)$$

Подставляя это выражение в формулу (11.6), найдём усреднённую ширину $\Gamma_{Al}^J (\equiv \Gamma_{Aa}^C)$:

$$\Gamma_{Al}^J = g_{lis, J} D_J \frac{\zeta_l}{2\pi}. \quad (12.5)$$

Эта формула связывает вероятность (т. е. частичную ширину) распада составного ядра C , в результате которого появляется частица a с моментом l и ядро A , с вероятностью прилипания ζ_l частицы a к ядру A и средним расстоянием между уровнями составного ядра D_J (речь идёт, очевидно, об уровнях C с энергией возбуждения, близкой к $E_C = E_A + E_a + E$). Величина ζ_l определяется энергией падающей частицы E и её моментом l .

Из (12.5) вытекает важный вывод: если вероятность прилипания ζ_l по порядку величины равняется единице, то частичная ширина Γ_{Al}^J имеет порядок величины расстояния между уровнями составного ядра D_J . Иными словами, уровни составного ядра в этом случае перекрываются.

Вряд ли нужно ещё раз подчёркивать, что формула (12.5) определяет только усреднённую по большому числу близко расположенных уровней частичную ширину для какого-либо вида расщепления составного ядра. Индивиду-

дуальные ширины отдельных уровней могут, конечно, при этом сильно отличаться друг от друга.

Просуммировав σ_l по l , мы найдём полное сечение образования составного ядра σ_u , которое одновременно представляет собой суммарное сечение для всех процессов, связанных с последующим распадом составного ядра

$$\sigma_u = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \zeta_l. \quad (12.6)$$

Умножив σ_u на относительную вероятность какого-либо процесса α , равную Γ_α/Γ (Γ_α — частичная ширина, отвечающая процессу α , Γ — полная ширина уровня), получим сечение σ_α для этого процесса:

$$\sigma_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} \sigma_u. \quad (12.6')$$

Пусть составное ядро образуется в результате слияния ядра A с быстрым нейтроном, длина волны которого $\lambda \ll R$. В этом случае, как мы указывали выше,

$$\zeta_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda}, \\ 0, & \text{если } l > \frac{R}{\lambda}. \end{cases}$$

Найдём, чему равняется при этом полное сечение образования составного ядра σ_u . Согласно (12.6), имеем:

$$\sigma_u = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\left[\frac{R}{\lambda}\right]} (2l+1). \quad (12.7)$$

Так как $R/\lambda \gg 1$, то без особой ошибки можно заменить в (12.7) суммирование интегрированием. Мы получим при этом

$$\sigma_u \approx \pi R^2. \quad (12.7')$$

Таким образом общее сечение для всех процессов, связанных с распадом составного ядра, которое образо-

валось в результате слияния исходного ядра с быстрым нейтроном, равняется πR^2 .

Заметим, что такое же значение имеет сечение поглощения частиц поглощающей сферой радиуса R , вычисленное согласно законам классической механики. Это совпадение является результатом квазиклассического рассмотрения, справедливого при $\lambda \ll R$.

Не следует думать, что σ_u представляет собой общее сечение для всех процессов, могущих иметь место при столкновении частицы a с ядром A .

В самом деле, в σ_u входит только часть упругого рассеяния частиц a , а именно упругое рассеяние, связанное с образованием составного ядра и последующим вылетом из него частицы того же сорта a без изменения энергии частицы. Но возможно также упругое рассеяние частиц, не связанное с образованием составного ядра.

Определим эффективное сечение этого рассеяния. Рассмотрим предварительно общую задачу о рассеянии частиц некоторым силовым центром.

Пользуясь разложением плоской волны e^{ikz} в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) f_l(kr),$$

где

$$f_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

($J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, $z = r \cos \vartheta$) и замечая, что при больших r справедлива асимптотическая формула

$$f_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right),$$

легко видеть, что волновая функция свободной частицы при больших r асимптотически ведёт себя, как

$$\frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8')$$

Из этой формулы следует, что функция

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}]$$

представляет собой асимптотическое выражение для радиальной волновой функции свободной частицы, орбитальный момент которой относительно некоторой точки O равен $l\hbar$ (r — расстояние от этой точки). Здесь первое слагаемое представляет собой падающую, а второе — рассеянную волну с моментом l .

Асимптотическое выражение радиальной функции в случае рассеяния несвободной частицы с моментом l имеет вид

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}],$$

где β_l — постоянная, отличная от единицы.

Поэтому общее асимптотическое выражение волновой функции в случае рассеяния определяется формулой

$$\psi \sim \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8)$$

Если на силовой центр падает плоская волна e^{ikz} , то рассеянная волна вдали от центра имеет вид

$$\frac{1}{r} e^{ikr} f(\vartheta),$$

где ϑ — угол рассеяния. Мы будем в дальнейшем называть $f(\vartheta)$ амплитудой рассеянной волны.

Согласно (12.8) и (12.8') амплитуда рассеянной волны имеет следующий вид:

$$f(\vartheta) = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1) P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8'')$$

Зная $f(\vartheta)$, можно найти дифференциальное сечение упругого рассеяния в интервале углов $\vartheta, \vartheta + d\vartheta$ по формуле

$$d\sigma_s = 2\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

и полное сечение

$$\sigma_s = 2\pi \int_0^\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (12.9)$$

В тех случаях, когда рассеяние не сопровождается поглощением частиц, интенсивность расходящейся волны равна интенсивности падающей волны и, следовательно, абсолютное значение β_l равно единице. Полагая $\beta_l = e^{2i\eta_l}$, где η_l — вещественная величина, определяющая изменение фазы l -волны при рассеянии, получим из (12.9) следующую формулу для σ_s :

$$\sigma_s = 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (12.9')$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда возможно поглощение частиц силовым центром. При этом формулы (12.9) и (12.9') остаются в силе, следует лишь считать в них $|\beta_l| < 1$, так как $|\beta_l|^2$ представляет собой отношение интенсивностей расходящейся и падающей l -волн.

Это значит, что при наличии поглощения частиц фазу рассеяния η_l следует считать не вещественной, а комплексной величиной^[51]:

$$\eta_l = \eta_l^{(r)} + i\eta_l^{(i)}, \quad (12.10)$$

где $\eta_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(i)}$ — вещественные величины, причём $\eta_l^{(i)} > 0$.

Замечая, что

$$|\beta_l - 1|^2 = 2e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}),$$

представим сечение упругого рассеяния при наличии поглощения в виде

$$\sigma_s = 2\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}). \quad (12.11)$$

Если $\eta_l^{(i)} = 0$, то эта формула переходит в (12.9'). Формулой (12.11) мы можем пользоваться при определении

сечения упругого рассеяния частиц ядрами, не связанного с образованием составного ядра.

Покажем, что мнимая часть фазы η_l может быть просто выражена через введённый ранее коэффициент прилипания. Последний мы определили в случае поглощения быстрых частиц ($\lambda \ll R$) формулами (12.2) и (12.6).

Легко видеть, что сечение поглощения частиц ядром всегда выражается этими формулами (т. е. при любом соотношении между λ и R), причём коэффициент прилипания ζ_l связан с введённой выше величиной β_l (отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн) формулой

$$\zeta_l = 1 - |\beta_l|^2 = 1 - e^{-4\eta_l^{(i)}}. \quad (12.12)$$

В случае быстрых частиц эта формула очевидна, так как она вытекает из определения ζ_l , согласно (12.2). Мы должны, следовательно, убедиться в справедливости соотношений (12.2) и (12.6), в которых ζ_l определяется согласно (12.12), не пользуясь квазиклассическим рассмотрением, как это делалось при выводе (12.2). Для этого определим поток частиц через поверхность сферы большого радиуса, окружающей силовой центр. Этот поток, взятый в направлении внутренней нормали к сфере, определяет, очевидно, число частиц, поглощаемых в единицу времени силовым центром.

Поток определяется известной формулой

$$S = \frac{i\hbar}{2m} r^2 \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) d\omega,$$

где r — радиус сферы, $d\omega$ — элемент телесного угла. В качестве ψ мы должны, очевидно, воспользоваться выражением (12.8).

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} = & -\frac{\psi}{r} + \\ & + \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l [e^{-ikr} + (-1)^l \beta_l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

и пользуясь условием нормировки шаровых функций

$$\int P_l^2(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{4\pi}{2l+1},$$

получим следующий результат:

$$S = \frac{\pi \hbar}{mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Чтобы определить эффективный поперечник поглощения частиц σ_u , нужно разделить S на поток падающих частиц, равный $\frac{\hbar k}{m}$.

Итак,

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Это и есть формула (12.6), которую мы хотели вывести.

Полученная формула определяет сечение для всех неупругих процессов, связанных с образованием и последующим распадом составного ядра.

На основании (12.12) её можно записать также в виде

$$\sigma_u = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\gamma_l^{(i)}} \operatorname{sh} 2\gamma_l^{(i)}. \quad (12.13)$$

Полное сечение для всех процессов, могущих иметь место при столкновении частицы с ядром, равно сумме сечения упругого рассеяния, не связанного с образованием составного ядра, и сечения всех неупругих процессов, связанных с образованием составного ядра. Обозначая полное сечение через σ_t , получим на основании (12.11) и (12.13):

$$\begin{aligned} \sigma_t = \sigma_u + \sigma_s &= 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} \beta_l) = \\ &= 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{-2\gamma_l^{(i)}} \cos 2\gamma_l^{(r)}). \end{aligned} \quad (12.14)$$

В случае рассеяния медленных частиц (например тепловых нейтронов) ядрами, сечения σ_s и σ_u малы по сравнению с $\pi\lambda^2$. В этих условиях модуль фазы η_l мал по сравнению с единицей, и формулы (12.11), (12.13), (12.14) приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \{(\eta_l^{(r)})^2 + (\eta_l^{(i)})^2\}, \\ \sigma_u &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l^{(i)} (1 - 2\eta_l^{(i)}), \\ \sigma_t &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \{(\eta_l^{(r)})^2 - (\eta_l^{(i)})^2 + \eta_l^{(i)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Для достаточно медленных частиц здесь играет роль только первый член, соответствующий $l=0$. При этом если $\eta_0^{(i)} \ll \eta_0^{(r)}$, то

$$\frac{\eta_0^{(i)}}{\eta_0^{(r)}} = \frac{k\sigma_u}{\sqrt{4\pi\sigma_s}}. \quad (12.16)$$

В случае быстрых нейтронов, длина волны которых значительно меньше радиуса ядра $\lambda \ll R$, вероятность прилипания соответственно равна

$$\zeta_l = 1, \quad \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda},$$

$$\zeta_l = 0, \quad \text{если } l > \frac{R}{\lambda}.$$

Соответственно этому

$$\beta_l = 0, \quad \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda},$$

$$\beta_l = 1, \quad \text{если } l > \frac{R}{\lambda}.$$

(Ясно, что при $l > R/\lambda$ значение β_l должно равняться единице, так как в этом случае отсутствует рассеяние нейтральных частиц, какими являются нейтроны.)

Легко видеть, что в этом случае σ_n , как и σ_n , равняется πR^2 . Поэтому полное сечение равно $2\pi R^2$:

$$\sigma_n = \pi R^2, \quad \sigma_s = \pi R^2, \quad \sigma_t = 2\pi R^2, \quad \lambda \ll R \quad (12.17)$$

Заметим, что рассматриваемое упругое рассеяние быстрых нейтронов можно трактовать как дифракцию нейтронной волны от края ядра^[52]. Действительно, пользуясь известным равенством^[53]

$$(2l+1) P_l(t) = P'_{l+1}(t) - P'_{l-1}(t),$$

можно представить амплитуду рассеяния быстрых нейтронов в виде

$$f_n(\vartheta) = \frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\left[\frac{R}{\lambda}\right]} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) = \\ = \frac{i\lambda}{2} [P'_{l_0+1}(\cos \vartheta) + P'_{l_0-1}(\cos \vartheta)],$$

где

$$l_0 = \frac{R}{\lambda} \gg 1.$$

(Мы пренебрегли в сумме слагаемым $P'_1(z) = 1$, так как в области углов, в которой амплитуда $f_n(\vartheta)$ заметно отлична от нуля, сумма значительно больше единицы.)

Для больших углов рассеяния $f_n(\vartheta) \approx 0$. В случае малых углов $\vartheta \ll 1$, пользуясь асимптотическими формулами для полинома Лежандра^[53], получим:

$$f_n(\vartheta) = i \frac{R}{\vartheta} J_1\left(\frac{R\vartheta}{\lambda}\right), \quad \vartheta \ll 1, \quad (12.18)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка.

Как известно из оптики, такой же формулой определяется амплитуда световой волны, претерпевшей дифракцию от абсолютно чёрного шара радиуса R ^[54]. (В рассматриваемом случае ядро поглощает все падающие на него нейтроны, т. е. ведёт себя как чёрное тело.)

Таким образом упругое рассеяние быстрых нейтронов характеризуется резкой направленностью вперёд.

Это рассеяние, которое может быть названо дифракционным, наблюдается экспериментально^[55].

Дифракционные явления должны иметь место также при рассеянии очень быстрых заряженных частиц, длина волны которых у поверхности ядра значительно меньше радиуса ядра^[56].

Роль величины $l_0 = \frac{R}{\lambda}$ в случае заряженных частиц играет величина

$$l_z = \frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}},$$

где λ — длина волны падающей частицы вдали от ядра, E — её энергия, Ze и ze — заряды ядра и частицы.

Мы предполагаем, что $l_z \gg 1$ и считаем, что вероятность прилипания $\zeta_l = 1$, если $l \leq l_z$. При $l > l_z$, в отличие от случая нейтронов, β_l не равняется единице, так как кулоновское рассеяние имеет место при всех l . Соответственно этому при $l > l_z$ нужно положить:

$$\beta_l = e^{2i\eta_l}, \quad \eta_l = \arg \Gamma(l+1+i\alpha), \quad \alpha = \frac{Zze^2}{\hbar v}.$$

Пользуясь этими значениями β_l и ζ_l , можно определить, согласно (12.8'), амплитуду рассеяния, которую мы обозначим теперь через $f_z(\vartheta)$.

В случае $\alpha < 1$ мы получим следующие результаты^[56]:

$$\left. \begin{aligned} f_z(\vartheta) &= \frac{iR}{\vartheta} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}} l_z^{2i\alpha} J_1(l_z \vartheta), \\ \frac{1}{l_z} &\ll \vartheta \ll 1, \\ f_z(\vartheta) &= \frac{i\lambda}{2} l_z^{2i\alpha+2} - \frac{2\lambda}{\vartheta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\vartheta}{2} + 2i\eta_0}, \\ \vartheta &\ll \frac{1}{l_z}. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Формулы (12.19) показывают, что в области углов $\frac{1}{l_z} \ll \vartheta \ll 1$ имеет место дифракционное рассеяние заря-

жений частиц, которое только фазой отличается от соответствующего рассеяния быстрых нейтронов. При $\alpha = 0$ (12.19) переходит в (12.18).

В области углов $\theta \ll \frac{1}{l_z}$ справедлива вторая формула (12.19), в которой первое слагаемое не зависит от угла рассеяния, а второе слагаемое представляет собой амплитуду рассеяния в кулоновском поле ядра.

Итак, рассеяние очень быстрых заряженных частиц не всегда описывается формулой Резерфорда. Последняя оказывается справедливой только при очень малых углах рассеяния; именно, углы должны быть меньше $\sqrt{\alpha}/l_z$, если $\alpha < 1$, и меньше α/l_z , если $\alpha > 1$. Если $\alpha > 1$, то в области углов $\theta > (\alpha/l_z)$ снова имеет место первая формула (12.19).

Таким образом в области углов $1 \gg \theta > 1/l_z$ при $\alpha < 1$ и в области углов $1 \gg \theta > (\alpha/l_z)$ при $\alpha > 1$ обычное кулоновское рассеяние заменяется диффракционным рассеянием того же типа, что и рассеяние быстрых нейтронов.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о рассеянии медленных частиц.

При рассмотрении столкновений ядер с медленными частицами ($\lambda \gg R$) мы можем пользоваться общими формулами (12.15). Определение вероятности прилипания для этого случая даётся в следующем параграфе. Здесь мы отметим лишь, что при $\lambda \gg R$ все β_i , за исключением β_0 , равны единице. Поэтому в сумму (12.8'), так же как и в (12.15), входит только одно слагаемое с $l=0$.

Отсюда следует, что рассеяние медленных частиц в системе координат, где покоится центр инерции ядра и сталкивающейся с ним частицы, является сферически симметричным. Сечение упругого рассеяния в отсутствие поглощения равно, согласно (12.9'),

$$\sigma_s = 4\pi\lambda^2 \sin^2 \eta_0. \quad (12.20)$$

(Учёт поглощения производится в следующем параграфе.)

Дифференциальное сечение упругого рассеяния в этом случае в системе координат, где покоится центр

инерции, имеет вид

$$d\sigma_s = \frac{\sigma_s}{2} \sin \theta d\theta. \quad (12.20')$$

Заметим, что в системе координат, где до столкновения ядро покоилось, энергия частицы, равная до столкновения E , становится в результате столкновения равной

$$E' = E \frac{M^2 + m^2 + 2mM \cos \theta}{(M+m)^2},$$

где m и M — массы частицы и ядра.

Из этой формулы следует, что

$$\sin \theta d\theta = \frac{(M+m)^2 dE'}{2mM E},$$

поэтому формула (12.20') принимает вид

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \sigma_s \frac{(M+m)^2 dE'}{4mM E}, \\ E &\geq E' \geq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E. \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Отсюда легко заключить, что в рассматриваемом случае медленных частиц нормированная вероятность того, что в результате столкновения с ядром энергия частицы будет находиться в интервале E' и $E' + dE'$, равна:

$$\omega(E') dE' = \frac{dE'}{(1-\varepsilon)E}, \quad \varepsilon = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2. \quad (12.22)$$

Мы видим, что в результате столкновения все значения энергии в интервале $(E, \varepsilon E)$ равновероятны.

§ 13. Вероятность прилипания. Перейдём к определению зависимости вероятности прилипания ζ_1 от энергии частицы*). Заметим предварительно, что мы рассматриваем здесь случай близко расположенных или даже перекрывающихся уровней и не учитываем особенностей отдельных индивидуальных уровней. Таким образом наше рассмотрение будет по существу статистическим.

*) Мы следуем ниже работе [50].

Мы будем исходить из того, что свободная частица, попавшая в ядро, поглощается последним и теряет свою индивидуальность. Поэтому, рассматривая образование составного ядра с феноменологической точки зрения, мы должны характеризовать ядерное вещество большим поглощением ядерных частиц.

Для получения качественной картины сделаем простейшее предположение, считая, что число частиц, поглощаемых в единицу времени в некоторой точке ядра, пропорционально плотности частиц в той же точке.

Уравнение непрерывности с учётом поглощения можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{2}{\hbar} \sigma \cdot \rho, \quad (13.1)$$

где $\mathbf{j}$ и ρ — соответственно плотность тока и плотность частиц, а σ — некоторая величина, характеризующая поглощение, которую будем называть абсорбционным потенциалом.

Эта величина зависит от координат, а также от энергии и других величин, характеризующих частицу (спин, направление движения и др.). Для качественной ориентации мы будем считать, что зависимость от спина и направления движения не существенна. Что же касается зависимости от энергии частицы, то она может стать заметной только в очень большом интервале изменения энергии, по порядку величины равном энергии связи частиц в ядре (~ 10 MeV). Рассматривая небольшой интервал изменения энергии, можно считать σ не зависящим от энергии частицы.

Итак, мы предполагаем, что σ зависит только от координат частицы.

Легко видеть, что наличие абсорбционного потенциала в (13.1) можно учесть, если записать уравнение Шредингера для падающей частицы в виде

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V + i\sigma) \psi = 0, \quad (13.2)$$

где E — кинетическая энергия частицы вдали от ядра, а V — её потенциальная энергия.

Чтобы доказать эквивалентность уравнений (13.1) и (13.2), умножим (13.2) на ψ^* [ψ^* — величина комплексно сопряжённая ψ] и вычтем из полученного произведения комплексно сопряжённое ему выражение. Пользуясь определениями ρ и $\mathbf{j}$:

$$\rho = \psi^* \psi; \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*),$$

мы и получим (13.1). Таким образом абсорбционный потенциал появляется, как мнимая часть эффективной комплексной потенциальной энергии частицы $V - i\sigma$.

Внутри ядра σ по порядку величины равняется энергии ядерного взаимодействия, что составляет около 30 MeV.

Заметим, что ни σ , ни V не испытывают резкого скачка на границе ядра, поскольку ядерные силы, которыми в сущности и определяются V и σ , обладают конечным радиусом действия. Следует также иметь в виду, что граница ядра не может считаться резкой, благодаря наличию нулевых колебаний ядерных частиц и конечности радиуса действия ядерных сил. Вне узкого пограничного слоя, который мы назовём областью диффузности ядерной границы, потенциал $V - i\sigma$ можно не учитывать.

Следует подчеркнуть, что феноменологическое рассмотрение, которым мы пользуемся, вводя σ , не может, конечно, дать исчерпывающего описания всех сторон ядерных столкновений (хотя бы потому, что при этом мы исходим из рассмотрения задачи одного тела). К этому следует добавить, что интересующая нас величина коэффициента прилипания ζ_l существенно зависит от хода изменения σ у поверхности ядра, о котором можно лишь делать те или иные предположения. Поэтому излагаемая теория является полукачественной; тем не менее, как мы увидим далее, основные особенности поведения ζ_l при больших и малых энергиях она передаёт правильно.

Запишем потенциальную энергию частицы в виде $V = V_n + V_l$, где V_n связано с ядерными, а V_l — с кулоновскими и центробежными силами. Будем считать, что

V_n , σ , V_l зависят только от r — расстояния до центра ядра. Волновая функция ψ зависит в этом случае также только от r . Введём радиальную функцию $u = r\psi$; уравнение Шредингера для неё имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \Phi(r) u, \quad (13.3)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [-W(r) + V_n(r) - i\sigma(r)]$$

и

$$W(r) = E - V_l(r).$$

Вне ядра, но вблизи от его поверхности, где V_n и σ играют ещё существенную роль, будем считать $W(r)$ постоянной, равной

$$W = E - V_l(R),$$

где R — радиус ядра.

Рассмотрим сначала случай больших энергий падающей частицы, когда длина волны частицы значительно меньше радиуса ядра. В этом случае можно пользоваться методом квазиклассического приближения [57]. Условие применимости этого метода состоит в том, что модуль изменения Φ на протяжении длины волны, равной $|\Phi^{-1/2}|$, должен быть малым по сравнению с абсолютным значением самой функции Φ .

Поскольку величина W предполагается большой, а V_n и σ не испытывают резкого изменения на границе ядра, можно считать, что условия применимости метода квазиклассического приближения выполнены.

Пользуясь этим методом, представим решение уравнения (13.3) в виде

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp \left(\int_0^r \Phi^{1/2} dr \right). \quad (13.4)$$

Мы должны при этом взять $\sqrt{\Phi}$ с таким знаком, чтобы u убывало по направлению к центру ядра. Такой выбор знака соответствует нашему основному предположению

о поглощении частиц ядром. Итак, вещественная часть $\Phi^{1/2}$ должна быть положительной. При $r < R$ величина Φ находится в третьей четверти плоскости комплексного переменного (вещественная и мнимая части Φ отрицательны). Поэтому $\Phi^{1/2}$ должна лежать в четвертой четверти комплексной плоскости.

Представим себе теперь, что r увеличивается; при этом σ и V_n уменьшаются и, наконец, вне ядра становятся равными нулю. Поскольку $\Phi^{1/2}$ всё время должно оставаться в четвертой четверти, мнимая часть $\Phi^{1/2}$ должна быть отрицательной также и вне ядра. Поэтому решение (13.4) вне ядра имеет вид

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp \left\{ -i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int [E - V_l(r)]^{1/2} dr \right\}, \quad (13.4')$$

т. е. представляет собой чисто падающую волну. Так как мы не получили отражённой волны, то это значит, что вероятность прилипания ζ_l равна единице.

Итак, для быстрых частиц, попадающих в сферу действия ядра,

$$\zeta_l = 1.$$

Полученное соотношение имеет простой физический смысл. Поскольку мы рассматриваем случай быстрых частиц, т. е. малых длин волн, справедлива классическая механика. Но в таком случае совершенно ясно, что если частица попадает в сферу действия ядра, т. е. параметр столкновения для неё меньше радиуса ядра, то частица поглощается ядром, иначе говоря, $\zeta_l = 1$. Отклонения от соотношения $\zeta_l = 1$ связаны с неточностью квазиклассического приближения, которым мы пользовались.

Перейдём теперь к рассмотрению случая малых энергий падающей частицы, когда её длина волны велика по сравнению с радиусом ядра.

Предположим, что падающей частицей является медленный нейтрон, орбитальный момент которого равен нулю. В этом случае $V_l = 0$.

Вне ядра уравнение (13.3) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} Eu = 0,$$

откуда

$$u = \text{const.} \cdot \sin(kr + \delta) = \text{const.} \cdot \{e^{ikr+i\delta} - e^{-ikr-i\delta}\}, \quad (13.5')$$

где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ и δ — комплексная фаза рассеяния. Последнюю можно связать со значением логарифмической производной u на поверхности ядра, т. е. при $r = R$

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \chi. \quad (13.5'')$$

Так как мы предполагаем, что длина волны падающей частицы значительно больше размеров ядра, то значение этой производной вне ядра не испытывает существенного изменения на расстояниях порядка R . Поэтому введение величины χ имеет смысл, несмотря на диффузность ядерной границы.

Величину χ следует считать комплексной, так как, благодаря возможности поглощения частиц, комплексной является эффективная потенциальная энергия. Мы запишем χ в виде

$$\chi = \frac{1}{b} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi > 0,$$

где b по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы, φ — вещественная фаза, зависящая от комплексного потенциала $V - i\sigma$. [То обстоятельство, что $\varphi > 0$, следует из выражения для коэффициента прилипания ζ_0 , см. ниже, формула (13.6').] В первом приближении можно считать, что b и φ не зависят от энергии.

Так как kR и абсолютное значение δ малы по сравнению с единицей (последнее условие означает, что величина сечения рассеяния мала по сравнению с $\pi\lambda^2$), то (13.5') мы представим в виде

$$u \approx \text{const.} \cdot (kr + \delta).$$

Граничное условие (13.5'') приводит к результату

$$\delta = -kR + kbe^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Если $\sigma = 0$, то величина δ будет вещественной. В этом случае мы имеем чисто упругое рассеяние нейтронов. Сечение рассеяния σ_s связано с вещественной фазой δ соотношением

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta.$$

Считая b малым по сравнению с R , мы получим $\delta \approx -kR$, и поэтому

$$\sigma_s = 4\pi R^2.$$

Это сечение рассеяния медленных частиц от непроницаемого шара радиуса R в четыре раза превышает соответствующее сечение, даваемое классической механикой.

Из формулы (13.5') следует, что отношение амплитуд расходящейся и падающей волн равно $\beta_0 = e^{2i\delta}$. В случае комплексной фазы δ величина $|\beta_0|$ меньше единицы. Вероятность прилипания частиц с моментом $l=0$ равна, согласно (12.12):

$$\zeta_0 = 1 - |\beta_0|^2 = 1 - |e^{2i\delta}|^2 \approx 4kb \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (13.6')$$

причем мы пренебрегли здесь членами порядка δ^2 .

Выше мы говорили, что b и φ в области малых энергий можно считать не зависящими от энергии нейтрона. Формула (13.6') показывает в таком случае, что для медленных нейтронов, длина волны которых велика по сравнению с R , вероятность прилипания пропорциональна k , т. е. $\sqrt{E}$.

Мы перепишем (13.6') в виде

$$\zeta_0 = kb', \quad (13.6)$$

где b' по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы.

Согласно (12.6) мы можем теперь определить сечение захвата медленных нейтронов

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \zeta_0 = \frac{\pi b'}{k} = \frac{\text{const.}}{v} \quad (13.7)$$

(v — скорость нейтронов).

Эта формула выражает хорошо известный закон поглощения медленных нейтронов (закон $1/v$).

Мы определили зависимость вероятности прилипания от энергии падающей частицы в двух предельных случаях больших и малых энергий, когда длина волны частицы мала или велика по сравнению с радиусом ядра.

Для получения общей формулы для ζ_l , пригодной при всех энергиях, необходима детальная теория ядерных сил.

Введём в рассмотрение критическую длину волны $\lambda_c = \frac{1}{k_c} = b'$ и соответствующую ей энергию E_c . При $k = k_c$ коэффициент прилипания $\zeta \approx 1$. Согласно [50], $b' \approx 6 \cdot 10^{-13}$ см и $E_c \approx 1$ MeV.

Если кинетическая энергия частицы у поверхности ядра превосходит E_c , то вероятность прилипания для неё близка к единице.

В случае быстрых нейтронов для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы момент l был меньше чем $\frac{R}{\lambda}$; для быстрых заряженных частиц l должно быть меньше, чем $\frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}}$ (здесь λ означает длину волны частицы вдали от ядра).

Для медленных нейтронов, энергия которых меньше $E_c \approx 1$ MeV и $l=0$, вероятность прилипания имеет вид

$$\zeta_0 \approx \left(\frac{E}{E_c}\right)^{1/2}.$$

Воспользуемся этой формулой, чтобы получить выражение для средней нейтронной ширины Γ_n .

Вылетающие из ядра нейтроны предполагаются медленными, поэтому для них $l=0$. В этом случае $g_{0s,j} = 1$,

и формула (12.5) для Γ_n приобретает вид

$$\Gamma_n = \frac{D}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{E_c}}, \quad (13.7')$$

где E — энергия вылетающих из ядра нейтронов.

Полагая $E_c \approx 0,7$ MeV [50], мы получим отсюда

$$\Gamma_n = 1,9 \cdot 10^{-4} DE^{1/2}, \quad (13.7'')$$

причём здесь E и D (среднее расстояние между уровнями составного ядра) выражены в eV.

Считая для ядер среднего атомного веса ($A \sim 100$) $D \approx 10$ eV, получим из (13.7''):

$$\Gamma_n E^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^{-3} (\text{вольт})^{1/2}. \quad (13.7''')$$

§ 14. Распределение частиц, вылетающих при распаде составного ядра, по энергиям. Применим статистические соображения § 11 к нахождению функции распределения частиц, вылетающих при распаде составного ядра по энергиям*).

Пусть E_C и E_A — энергии возбуждения составного ядра C и ядра A , остающегося после вылета из C частицы a .

Кинетическая энергия вылетающей частицы a равна

$$E = E_C - E_A - E_a,$$

где E_a — энергия покоя частицы a .

Будем считать, что E_A относится к непрерывному спектру ядра A , и поставим вопрос, какова вероятность того, что вылетевшая из ядра частица имеет энергию, заключённую в пределах от E до $E + dE$. Обозначим эту вероятность, отнесённую к единице времени, через $w(E) dE$.

Воспользуемся общей формулой (11.1) и положим в ней

$$g_C = \rho_C(E_C) dE_C \frac{\Omega d\mathbf{p}_C}{(2\pi\hbar)^3};$$

$$g_A = \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega d\mathbf{p}_A}{(2\pi\hbar)^3};$$

$$g_a = (2s + 1) \frac{\Omega d\mathbf{p}_a}{(2\pi\hbar)^3},$$

*) Ниже излагаются результаты работ Ландау [48] и Вайскопфа [49] по этому вопросу.

где $\rho_A(E_A) dE_A$ — число уровней ядра A в интервале энергии dE_A , причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения. Вместо ω_{Aa}^C мы должны теперь писать $\omega(E) dE$.

Таким образом мы получим:

$$\omega(E) dE \rho_C(E_C) dE_C dp_C = \omega_{Ca}^A \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} dp_A (2s+1) dp_a. \quad (14.1)$$

Перейдём от переменных p_A и p_a к переменным p_C и p , где p — импульс относительного движения частиц A и a , а также от переменных E_A , p к переменным E_C , E . Мы получим

$$\omega(E) dE = (2s+1) \frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \frac{ME}{\pi^2 \hbar^3} \sigma_C^{Aa} dE, \quad (14.2)$$

где σ_C^{Aa} — сечение образования составного ядра C , возникающего в результате столкновения частицы a с энергией E и ядра A , энергия возбуждения которого равна E_A .

Вспомним теперь связь между плотностью состояний ρ и энтропией ядра S , о которой говорилось в § 10. Считая в формуле (10.5) медленно меняющуюся функцию энергии $\lambda(u)$ постоянной, получим приближённо:

$$\frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \approx e^{S_A(E_A) - S_C(E_C)}$$

(индекс при S указывает на принадлежность к тому или иному ядру).

Пользуясь этим соотношением, перепишем (14.2) в виде

$$\omega(E) dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a - E) - S_C(E_C)} E dE. \quad (14.3)$$

Рассмотрим тот случай, когда кинетическая энергия вылетающей частицы значительно меньше $E_C - E_a$. Полагая в этом случае $S_A(E_C - E_a - E) \approx S_A(E_C - E_a) - ES'_A(E_C - E_a)$ и вспоминая, что

$$S'_A(W) = \frac{1}{T_A(W)},$$

где $T_A(W)$ — температура ядра A , энергия возбуждения которого равна W , получим:

$$\omega(E) dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a) - S_C(E_C)} e^{-\frac{E}{T_A(E_C - E_a)}} E dE. \quad (14.4)$$

Напомним, что σ_C^{Aa} зависит от E и E_A . Если частицей a является нейтрон, то в области больших энергий E сечение $\sigma \approx \pi R^2$. В этих условиях мы получаем распределение максвелловского типа, причём модулем этого распределения служит температура ядра A остающегося после вылета частицы, а не исходного ядра C . Различие между этими температурами, вообще говоря, довольно значительно, так как в результате вылета частицы происходит сильное «охлаждение» ядра.

Из формулы (14.4) следует, что средняя энергия вылетающих частиц при заданном E_C по порядку величины равна $T_A(E_C - E_a)$. В том случае, когда сечение образования составного ядра не зависит от энергии, средняя энергия вылетающих частиц равна $2T_A(E_C - E_a)$.

Отсюда можно сделать следующий вывод. Если составное ядро C создаётся в результате столкновения быстрого нейтрона с энергией E и ядра A , находящегося в основном состоянии, то получающиеся при распаде C нейтроны обладают в среднем энергией $\sim 2T_A(E_C - E_a) = 2T_A(E_A + E)$, которая, вообще говоря, значительно меньше E .

§ 15. Радиационные свойства ядра. Известно, что если длина волны излучения λ значительно превосходит размеры излучающей системы a , то интенсивность излучения может быть представлена в виде ряда по степеням $\xi = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \ll 1$.

Первый член этого разложения представляет собой дипольное излучение, второй член, содержащий дополнительный множитель $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$, — квадрупольное излучение и т. д.

Излучение возбужденного атома удовлетворяет условию $\lambda \gg a$, поэтому обычно, когда нет специальных условий, запрещающих дипольные переходы, главную роль в излучении атома играет дипольное излучение.

Несколько иные соотношения имеют место при излучении возбужденного ядра. Если энергия возбуждения ядра невелика, то условие $\lambda \gg R$ выполняется и здесь; однако изучение внутренней конверсии γ -лучей показывает, что в излучении ядра сравнительно велика роль квадрупольного излучения, интенсивность которого часто превосходит интенсивность дипольного излучения.

Чтобы объяснить особенности ядерного излучения, необходимо учитывать, согласно Бору, сильное взаимодействие между ядерными частицами.

Если возбуждение ядра не настолько велико, чтобы существенно повлиять на относительное положение соседних частиц, то можно предполагать, что излучательные свойства ядра будут подобны излучательным свойствам заряженного однородного макроскопического тела [43].

Легко видеть, что деформации такого тела, а также его вращения не сопровождаются дипольным излучением. В самом деле, дипольный момент тела $\mathbf{d}$ равен:

$$\mathbf{d} = \sum e \mathbf{r} = \int \rho_e \mathbf{r} dV = \frac{\rho_e}{\rho} R \mathbf{M},$$

где ρ_e — плотность электричества, ρ — плотность вещества, одинаковые вдоль тела, R — радиус-вектор, определяющий положение центра инерции тела, и M — его масса.

В случае свободного движения тела $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Поэтому $\ddot{\mathbf{a}} = 0$ и, следовательно, равняется нулю интенсивность дипольного излучения, пропорциональная $|\ddot{\mathbf{a}}|^2$.

Таким образом деформациям формы и вращения рассматриваемого тела отвечают колебания не дипольного момента, а моментов более высокого порядка, в первую очередь квадрупольного момента.

Эти простые соображения показывают, что в излучении ядра должно быть сравнительно сильно выражено квадрупольное излучение.

Можно сказать, что колебания дипольного момента связаны с перемещением центра зарядов относительно центра инерции ядра. При малых возбуждениях ядра, (~ 1 MeV) благодаря приближительному совпадению центра зарядов с центром инерции, дипольные колебания отсутствуют или, по крайней мере, сильно приглушены по сравнению с колебаниями квадрупольными, которые требуют для своего возбуждения гораздо меньшей энергии, чем дипольные колебания. Последние возникают с заметной интенсивностью только при сравнительно больших возбуждениях ядра (~ 10 MeV).

В силу этих обстоятельств интенсивность дипольных линий при малых возбуждениях ядра, несмотря на то, что $\lambda \gg R$, оказывается меньшей или того же порядка величины, что и интенсивность квадрупольных линий [43], [58].

При больших возбуждениях ядра главную роль в излучении ядра играет дипольное излучение.

Оценим вероятность квадрупольного излучения ядра. Интенсивность квадрупольного излучения равна

$$J = \omega^6 \frac{q^2}{5c^5},$$

где q^2 — квадрат тензора квадрупольного момента.

По порядку величины q^2 равно:

$$q^2 \approx (e^2 Z^2) \xi^2 R^2,$$

где eZ — заряд ядра, R — его радиус и ξ — амплитуда колебаний ядерного вещества.

Вероятность излучения в единицу времени равна $J/\hbar\omega$, а соответствующая ширина линии Γ_γ равна:

$$\Gamma_\gamma = \frac{J}{\hbar\omega} \sim \omega^5 \frac{e^2 Z^2 \xi^2 R^2}{5c^5}, \quad (15.1')$$

Для оценки ξ мы можем положить:

$$\hbar\omega \sim M\omega^2 \xi^2,$$

где M — масса ядра. Согласно (15.1') получим [43]:

$$\Gamma_{\gamma} \approx \frac{e^2 Z^2 \hbar \omega^4 R^2}{5c^3 M}. \quad (15.1)$$

Пользуясь этой формулой, можно показать, что при энергиях возбуждения $\sim 1 \text{ MeV}$ радиационная ширина Γ_{γ} для ядер среднего атомного веса по порядку величины равняется $0,1 \text{ eV} - 0,2 \text{ eV}$ [43], [59], [50].

Интенсивность октупольного излучения, а также полюсов более высокого порядка, как правило, гораздо меньше, чем интенсивность квадрупольного излучения, если только $\lambda \gg R$.

Радиационная ширина Γ_{γ}^l , отвечающая излучению l -польного γ -кванта, по порядку величины равна [59]:

$$\Gamma_{\gamma}^l \sim (Ze)^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2l+1} \frac{x^2 R^{2l}}{l!^2}, \quad (15.2)$$

где α — безразмерная величина порядка единицы. При $l=2$ эта формула переходит в (15.1), если считать в последней $\xi = \alpha R$.

Заметим, что l представляет собой момент количества движения, уносимого γ -квантом. Поэтому, если J и J' — моменты ядра до и после излучения, то

$$J = J' + l.$$

В частности, если ядро переходит в состояние с $J'=0$, то момент исходного состояния J должен равняться l .

Время жизни возбуждённого состояния по отношению к излучению l -польного γ -кванта равняется

$$\tau_l = \frac{\hbar}{\Gamma_{\gamma}^l}. \text{ Полагая [59] } R \sim 10^{-12} \text{ см, } \alpha \sim 1, \text{ получим по по-}$$

рядку величины

$$\tau_l \approx 5 \cdot 10^{-21} (l!)^2 \left(\frac{20}{\hbar \omega} \right)^{2l+1} \text{ сек.}, \quad (15.3)$$

где $\hbar \omega$ выражается в MeV.

Эта формула приводит к следующим значениям τ_l [59]. Если $l=3$, то при энергии возбуждения $\hbar \omega = 10 \text{ keV}$, $\tau \sim 7$ часов; при $\hbar \omega = 50 \text{ keV}$, $\tau \sim 0,3 \text{ сек.}$; при $\hbar \omega \sim 200 \text{ keV}$, $\tau \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$

Если $l=5$, то при $\hbar \omega = 10 \text{ keV}$ $\tau \sim 5 \cdot 10^{12}$ лет; при $\hbar \omega = 200 \text{ keV}$ $\tau \sim 10$ дней.

Как видно из приведённых данных, время жизни возбуждённого ядра по отношению к излучению γ -кванта небольшой энергии и высокой полярности чрезвычайно велико.

Это обстоятельство может быть использовано для объяснения явления ядерной изомерии.

Ядерные изомеры представляют собой модификации одного и того же изотопа, отличающиеся некоторым различием своих свойств. Обычно явление ядерной изомерии устанавливается по различию радиоактивных свойств изомерных ядер. В этом случае число радиоактивных периодов у какого-либо элемента превышает число радиоактивных изотопов [60], [61].

Для объяснения изомерии мы должны предположить, что у ряда изотопов существуют возбуждённые состояния, являющиеся метастабильными, т. е. отличающиеся достаточно большим временем жизни (которое во всяком случае должно превосходить период распада изомеров).

Можно предположить [62], что такие метастабильные состояния представляют собой слабо возбуждённые состояния, отличающиеся сравнительно большим значением момента количества движения по сравнению с основным состоянием.

Согласно сказанному выше, время жизни таких состояний по отношению к γ -излучению может быть очень большим (при достаточно малых $\hbar \omega$ и достаточно больших разностях моментов исходного и конечного состояний ядра).

Следует, однако, иметь в виду, что время жизни метастабильного состояния нельзя определять по формуле (15.3), так как эта формула учитывает только γ -переход, в действительности же возможны безрадиационные переходы, сопровождающиеся испусканием электрона из внешней оболочки атома (внутренняя конверсия γ -лучей). Благодаря этому для определения времени жизни рассматриваемых метастабильных состояний необходимо время, вычисленное согласно (15.3),